

Mathematik

Unbeschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
HENDRIK SCHLIETER
aus Kiel
– 2009 –

Dekan:	PROF. DR. DR. H.C. JOACHIM CUNTZ
Erster Gutachter:	APL. PROF. DR. WEND WERNER
Zweiter Gutachter:	PROF. DR. SIEGFRIED ECHTERHOFF
Tag der mündlichen Prüfung:	8. Juli 2009
Tag der Promotion:	8. Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Notation	5
1 Unbeschränkte Multiplikatoren auf Hilbert-C^*-Moduln	7
1.1 Reguläre Operatoren	7
1.2 Der Satz von Stone für Hilbert- C^* -Moduln	15
1.3 Zusammenhang zwischen regulären Operatoren auf E und auf $E \oplus E$	22
1.4 Multiplikatoren des Pedersen-Ideals	24
2 Operatorräume	27
2.1 Grundlagen	27
2.2 Beispiele	30
2.3 Unitale Operatorsysteme	34
2.4 Injektive Operatorräume	35
2.5 Ternäre Ringe von Operatoren	39
2.6 Selbstadjungierte Operatorräume	42
2.7 Die injektive Hülle eines s. a. Operatorraumes	44
3 Unbeschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen	49
3.1 C_0 -Linksmultiplikatoren und unbeschränkte schiefadjungierte Multiplikatoren	51
3.1.(a) Beispiele	56
3.2 Unbeschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen	58
3.3 Zusammenhang zwischen C_0 -Halbgruppen auf X und auf $C_2(X)$	63
3.4 Die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips in Opera- torräumen	67
3.5 Unbeschränkte Multiplikatoren von X auf $\mathcal{T}(X)$ überführen .	73
3.6 Unbeschränkte Multiplikatoren auf einen Hilbertraum über- führen	85

3.7	Die strikte X -Topologie auf $L(H)$	91
3.8	Störungstheorie	94
A	Beschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen	99
A.1	Multiplikatoren	99
A.2	Von links adjungierbare Multiplikatoren	104
B	C_0-Halbgruppen	107
B.1	Grundlagen	107
B.2	Die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips	110
B.3	Erzeuger von C_0 -Gruppen	114
	Literaturverzeichnis	117
	Symbolverzeichnis	123
	Stichwortverzeichnis	125

Einleitung

Unbeschränkte Multiplikatoren spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik, beispielsweise im Spektralsatz für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren oder in Verbindung mit Differentialoperatoren. Auch bei Berechnungen in der Quantenphysik treten oft unbeschränkte Größen auf, die durch unbeschränkte Operatoren dargestellt werden.

Unter unbeschränkten Multiplikatoren auf Hilbert- C^* -Moduln versteht man üblicherweise die sogenannten regulären Operatoren. Die Definition eines solchen Operators geht auf A. Connes zurück, der in [Con81] selbstadjungierte reguläre Operatoren auf C^* -Algebren einführt und diese Operatoren selbstadjungierte unbeschränkte Multiplikatoren nennt.

S. L. Woronowicz definiert in [Wor91] allgemeine reguläre Operatoren auf C^* -Algebren. Diese Operatoren kann man auch auf Hilbert- C^* -Moduln betrachten, wie beispielsweise von E. C. Lance ([Lan95]) oder J. Kustermans ([Kus97]) durchgeführt.

Die regulären Operatoren sind wichtig in der Theorie der nicht-kompakten Quantengruppen (siehe zum Beispiel [Wor91], [WN92] und [Wor95]). So werden verschiedene nicht-kompakte Quantengruppen von regulären Operatoren der zugrundeliegenden C^* -Algebra erzeugt, und auch die Komultiplikation lässt sich mit Hilfe dieser Erzeuger beschreiben. Außerdem kann man in Kasparovs bivarianter KK -Theorie $KK(A, B)$ mit Hilfe unbeschränkter Kasparov-Moduln definieren und benutzt dafür reguläre Operatoren (siehe [BJ83]).

Einen weiteren Zugang zu unbeschränkten Multiplikatoren auf C^* -Algebren studieren A. J. Lazar und D. C. Taylor in [LT76]. Sie betrachten die Multiplikatoralgebra (Algebra der Bizentralisatoren) des Pedersen-Ideals. Wie C. Webster in [Web04] feststellt, umfassen die regulären Operatoren die Multiplikatoren des Pedersen-Ideals.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Theorie der unbeschränkten Multiplikatoren von Hilbert- C^* -Moduln auf die wesentlich größere Klasse der Operatorräume fortzusetzen. Bekanntlich trägt jeder Hilbert- C^* -Modul eine kanonische Operatorraumstruktur. Da ein Operatorraum weniger Struktur als ein Hilbert- C^* -Modul besitzt, ist nicht ohne weiteres ersichtlich, wie man die Definition eines regulären Operators auf Operatorräume übertragen kann.

Es gelingt uns, unbeschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen so zu definieren, dass diese Multiplikatoren auf Hilbert- C^* -Moduln, versehen mit der kanonischen Operatorraumstruktur, mit den regulären Operatoren übereinstimmen, also eine Verallgemeinerung der regulären Operatoren auf Operatorräume sind. Außerdem enthalten die unbeschränkten Multiplikatoren auf einem Operatorraum die beschränkten, von links adjungierbaren Multiplikatoren. Des weiteren werden verschiedene Eigenschaften unbeschränkter Multiplikatoren untersucht und intrinsische Charakterisierungen sowie Anwendungen angegeben.

Im folgenden schildern wir die Struktur der Arbeit und den Inhalt der einzelnen Kapitel.

Im ersten Abschnitt von **Kapitel 1** werden Grundlagen der Theorie der regulären Operatoren auf Hilbert- C^* -Moduln wiederholt. Neu ist hier eine Variante des Satzes von Stone für Hilbert- C^* -Moduln, die im zweiten Abschnitt bewiesen wird. Es stellt sich heraus, dass man die schiefadjungierten regulären Operatoren als Erzeuger bestimmter C_0 -Gruppen charakterisieren kann. Zusammenhänge zwischen regulären Operatoren auf E und auf $E \oplus E$ werden im darauffolgenden Abschnitt untersucht. Zusammen mit dem hier bewiesenen Satz von Stone wird dies im dritten Kapitel verwendet, um zu zeigen, dass die unbeschränkten Multiplikatoren auf einem Hilbert- C^* -Modul mit den regulären Operatoren übereinstimmen. Im letzten Abschnitt werden die Multiplikatoren des Pedersen-Ideals behandelt.

In **Kapitel 2** wird zunächst an Grundlagen der Theorie der Operatorräume erinnert. So werden mehrere Beispiele für Operatorräume vorgestellt und unital Operatorsysteme behandelt. Ferner werden wichtige Eigenschaften zu injektiven Operatorräumen und ternären Ringen von Operatoren zusammengetragen. Im vorletzten Abschnitt wird auf selbstadjungierte Operatorräume eingegangen. Neu ist hier das Studium der injektiven Hülle solcher Operatorräume im letzten Abschnitt.

Das **dritte Kapitel** ist der zentrale Teil dieser Arbeit. Hier werden verschiedene Begriffe von unbeschränkten Multiplikatoren auf einem Operatorraum jeweils mit Hilfe von C_0 -Halbgruppen (bzw. C_0 -Gruppen) definiert. Es werden verschiedene Eigenschaften dieser Multiplikatoren untersucht und intrinsische Charakterisierungen bewiesen. Beispielsweise ist A genau dann ein unbeschränkter Multiplikator, wenn eine unbeschränkter Operator B in X derart existiert, dass $\begin{pmatrix} 0 & iA & 0 & 0 \\ iB & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine vollständig kontraktive C_0 -Gruppe auf dem Spaltenoperatorraum $C_4(X)$ erzeugt.

Somit ist von Interesse, wann ein Operator Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Gruppe ist. Eine Charakterisierung hierfür wird im vierten Abschnitt gegeben, in dem die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips auf Operatorräume übertragen werden. Ferner werden unbeschränkte Multiplikatoren von einem Operatorraum X auf die ternäre Hülle von X und auf einen Hilbertraum übertragen. Des weiteren wird eine Reihe von Anwendungen angegeben. Zum Beispiel wird ein Resultat aus der Störungstheorie regulärer Operatoren von S. Damaville ([Dam04]) auf Operatorräume verallgemeinert.

In **Anhang A** wird an beschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen erinnert, genauer an Linksmultiplikatoren und von links adjungierbare Multiplikatoren.

Grundlagen der Theorie der C_0 -Halbgruppen werden in **Anhang B** behandelt.

Danksagung

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein ganz besonderer Dank gilt apl. Prof. Dr. Wend Werner für die Betreuung meiner Promotion. Sein stetes Interesse und viele anregende Diskussionen haben mich angespornt.

Außerdem möchte ich mich bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe *Funktionalanalysis, Operatoralgebren und Nichtkommutative Geometrie* bedanken, insbesondere bei Prof. Dr. Dr. h.c. Joachim Cuntz und Prof. Dr. Siegfried Echterhoff. Des weiteren danke ich Prof. Dr. Reimar Wulkenhaar. Ferner gilt mein Dank allen Kollegen aus dem SFB *Geometrische Strukturen in der Mathematik*. Insbesondere möchte ich Ralf Kasprowitz, Erik Müller und Dr. Walther Paravicini hervorheben, des weiteren Klaus Loerke, Katharina Neumann, Dr. Thomas Timmermann und Moritz Weber. Weiter danke

ich Kyung-huy Moon, Alexander Ullmann und den Kollegen aus dem Blauen Pavillon, insbesondere Dr. Steve Brüske, Dr. Daniel Epping, Christian Kappen und Dr. Christian Wahle. Bei Dennis Bohle möchte ich mich für viele anregende Diskussionen bedanken. Für fachliche und finanzielle Unterstützung danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Ferner gilt mein Dank meinen Eltern für ihre vielfältige Unterstützung und allen anderen, die mir im Verlauf der Promotion besonderen Rückhalt gegeben haben.

Notation

Es sei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0 und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$. Mit $\mathbb{1}$ wird die Funktion auf \mathbb{R} , die konstant 1 ist, bezeichnet.

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $W \subseteq V$. Der komplexe Vektorraum aufspan von W in V wird mit $\text{lin } W$ notiert. Ist V ein normierter Raum, so setze $\overline{\text{lin } W} := \overline{\text{lin } W}$.

Sei \mathfrak{A} eine Algebra und $G \subseteq \mathfrak{A}$ eine Teilmenge. Als $\text{alg}(G)$ schreiben wir die von G in \mathfrak{A} erzeugte Algebra. Das Einselement einer unitalen Algebra \mathfrak{A} wird mit $e_{\mathfrak{A}}$ bezeichnet.

Seien X, Y, Z normierte Räume, und es sei eine Paarung $X \times Y \rightarrow Z$ gegeben, die wir als Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ notieren. Seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Es sei definiert

$$[MN] := \text{lin}\{xy; x \in M, y \in N\} \quad \text{und} \quad MN := \overline{[MN]}.$$

Für alle $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei mit $B_X(x, r)$ (bzw. $\overline{B}_X(x, r)$) die offene (bzw. abgeschlossene) Kugel in X um x mit Radius r bezeichnet. Die Menge der stetigen, linearen Abbildungen von X nach Y wird mit $L(X, Y)$ abgekürzt, die Menge der kompakten Operatoren von X nach Y mit $\mathcal{K}(X, Y)$. Setze $L(X) := L(X, X)$ und $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$.

Für eine Abbildung A wird mit $D(A)$ der Definitionsbereich von A notiert.

Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra. Mit $\mathcal{M}_l(\mathfrak{A})$ wird die Menge der Linksmultiplikatoren auf \mathfrak{A} bezeichnet und mit $\mathfrak{A}_{\geq 0}$ die Menge der positiven Elemente von \mathfrak{A} .

Unter einem Hilbert- C^* -Modul verstehen wir ein Rechts-Hilbert- C^* -Modul, dessen Skalarprodukt linear in der zweiten Variablen ist. Ebenso sei das Skalarprodukt eines Hilbertraumes linear in der zweiten Variablen.

Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Die Menge der adjungierbaren Abbildungen von E nach F wird als $\mathbb{B}(E, F)$ notiert. Setze $\mathbb{B}(E) := \mathbb{B}(E, E)$. Für alle $x \in F$ und $y \in E$ wird durch

$$\theta_{x,y} : E \rightarrow F, z \mapsto x \langle y, z \rangle_E,$$

eine Abbildung in $\mathbb{B}(E, F)$ definiert. Den abgeschlossenen, linearen Aufspann von $\{\theta_{x,y}; x \in F, y \in E\}$ in $\mathbb{B}(E, F)$ schreiben wir als $\mathbb{K}(E, F)$. Setze $\mathbb{K}(E) := \mathbb{K}(E, E)$.

Sei Ω ein topologischer Raum. Mit $C(\Omega)$ wird die Menge der stetigen Funktionen von Ω nach \mathbb{C} bezeichnet, mit $C_b(\Omega)$ die Teilmenge der beschränkten, stetigen Funktionen von $C(\Omega)$ und mit $C_c(\Omega)$ die Teilmenge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger von $C(\Omega)$. Ist Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum, so wird die Menge der im Unendlichen verschwindenden, stetigen Funktionen von Ω nach \mathbb{C} als $C_0(\Omega)$ notiert.

Kapitel 1

Unbeschränkte Multiplikatoren auf Hilbert- C^* -Moduln

In diesem Kapitel werden zunächst Grundlagen der Theorie der regulären Operatoren auf Hilbert- C^* -Moduln behandelt. Anschließend wird eine Variante des Satzes von Stone für Hilbert- C^* -Moduln bewiesen. Außerdem wird untersucht, wie reguläre Operatoren auf einem beliebigen Hilbert- C^* -Modul E und auf $E \oplus E$ zusammenhängen. Zusammen mit der hier gezeigten Variante des Satzes von Stone wird in Kapitel 3 bewiesen, dass die unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikatoren auf E gleich den schiefadjungierten regulären Operatoren auf E sind. Des weiteren wird an unbeschränkte Multiplikatoren des Pedersen-Ideals erinnert.

Generalvoraussetzung 1.1. Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra.

1.1 Reguläre Operatoren

Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff des regulären Operators auf Hilbert- C^* -Moduln ein. Reguläre Operatoren sind eine Verallgemeinerung dicht definierter, abgeschlossener Operatoren auf Hilberträumen. Es ist eine wesentliche Eigenschaft eines auf einem Hilbertraum H dicht definierten, abgeschlossenen Operators T , dass die Adjungierte T^* dicht definiert ist und dass $1 + T^*T$ das Inverse eines beschränkten Operators auf H ist, wobei mit 1 die Identitätsabbildung auf H bezeichnet wird. Diese Eigenschaft besitzen dicht definierte, abgeschlossene Operatoren auf Hilbert- C^* -Moduln i. a. nicht, da nicht einmal jeder beschränkte Operator adjungierbar

ist ([Lan95], S. 8). Daher verlangt man hier zusätzlich, dass T^* dicht definiert ist und dass $1 + T^*T$ dichtes Bild hat, um eine reichhaltige Theorie zu erhalten.

Definitions-Proposition 1.2 ([Lan95], S. 95). Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} , sei $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ dicht definiert und \mathfrak{A} -linear. Durch

$$D(T^*) := \{y \in F ; \exists z_y \in E \forall x \in D(T) : \langle Tx, y \rangle = \langle x, z_y \rangle\}$$

wird ein Untermodul von F definiert. Für alle $y \in D(T^*)$ ist das Element z_y in der obigen Formel eindeutig bestimmt und wird mit T^*y bezeichnet. Somit wird eine \mathfrak{A} -lineare, abgeschlossene Abbildung $T^* : D(T^*) \subseteq F \rightarrow E$, genannt die **Adjungierte** von T , definiert, die folgendes erfüllt:

$$\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle$$

für alle $x \in D(T)$ und $y \in D(T^*)$.

Definition 1.3. Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} .

- (i) Ein **regulärer Operator** von E nach F ist eine dicht definierte, abgeschlossene, \mathfrak{A} -lineare Abbildung $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ so, dass T^* dicht definiert ist und $1 + T^*T$ dichtes Bild hat.
- (ii) Die Menge der regulären Operatoren von E nach F wird mit $\mathcal{R}(E, F)$ bezeichnet. Setze $\mathcal{R}(E) := \mathcal{R}(E, E)$.

Für jeden regulären Operator $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ gilt: $\text{Bild}(1 + T^*T) = E$ ([Lan95], siehe den Beweis von Theorem 9.3).

Im Hilbertraum-Fall hat jeder dicht definierte, abgeschlossene Operator T eine dicht definierte Adjungierte T^* . In einem Hilbert- C^* -Modul E muss man dies hingegen als Voraussetzung an den Operator stellen. Außerdem gilt für einen dicht definierten, abgeschlossenen Operator T auf E , dessen Adjungierte dicht definiert ist, i. a. nicht, dass $1 + T^*T$ dichtes Bild hat (siehe beispielsweise [Lan95], S. 102–104). Daher wird auch dies in die Definition eines regulären Operators aufgenommen.

Da im Hilbertraum für alle dicht definierten, abgeschlossenen Operatoren T stets $1 + T^*T$ dichtes Bild hat, sind reguläre Operatoren eine Verallgemeinerung solcher Operatoren auf Hilbert- C^* -Moduln. Beispielsweise sind gewisse Differentialoperatoren dicht definierte, abgeschlossene Operatoren auf einem Hilbertraum (siehe zum Beispiel [DS63]).

1.1. REGULÄRE OPERATOREN

Die regulären Operatoren treten in der Theorie der nicht-kompakten Quantengruppen auf (siehe zum Beispiel [Wor91], [WN92] und [Wor95]). Eine Verallgemeinerung von regulären Operatoren, sogenannte semireguläre Operatoren, werden in [Pal99] untersucht.

Die Definition eines regulären Operators geht auf A. Connes zurück, der diese Operatoren selbstadjungierte unbeschränkte Multiplikatoren nennt und wie folgt auf C^* -Algebren definiert:

Definition 1.4 (Vgl. [Con81], Definition 7). Ein **selbstadjungierter unbeschränkter Multiplikator** auf \mathfrak{A} ist ein dicht definierter, abgeschlossener Operator $T : D(T) \subseteq \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften:

- (i) $\exists \lambda \in \mathbb{R}_{>0} : -\lambda i, \lambda i \in \rho(T)$,
- (ii) $y^*T(x) = T(y)^*x$ für alle $x, y \in D(T)$.

Wie im Hilbertraum definiert man:

Definition 1.5. Sei E ein Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} . Eine dicht definierte, \mathfrak{A} -lineare Abbildung $T : D(T) \subseteq E \rightarrow E$ heißt

- (i) **symmetrisch**, falls $T^* \supseteq T$ gilt,
- (ii) **selbstadjungiert**, falls $T^* = T$ ist, und
- (iii) **schiefadjungiert**, falls $T^* = -T$ gilt.

Auf jeder C^* -Algebra \mathfrak{B} wird durch

$$\langle x, y \rangle_{\mathfrak{B}} := x^*y$$

für alle $x, y \in \mathfrak{B}$ ein inneres Produkt derart definiert, dass \mathfrak{B} zugleich die Struktur eines Hilbert- C^* -Moduls trägt.

Die selbstadjungierten unbeschränkten Multiplikatoren von Connes fallen für $\lambda = 1$ in Definition 1.4.(i) unter den Begriff des regulären Operators:

Proposition 1.6 ([Baa80], S. 1). *Sei $T : D(T) \subseteq \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ linear, dicht definiert und abgeschlossen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) T erfüllt (i) und (ii) aus Definition 1.4 mit $\lambda = 1$.
- (b) (i) $\text{Bild}(1 + T^2)$ ist dicht in \mathfrak{A} ,
- (ii) $T = T^*$.

Da bei S. Baaj kein Beweis für die obige Proposition aufgeführt ist, geben wir einen Beweis an. Dieser verwendet die folgende Proposition, die man analog zum Hilbertraum-Fall beweist:

Proposition 1.7. *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $T : D(T) \subseteq E \rightarrow E$ linear, dicht definiert und symmetrisch. Ist $\text{Bild}(T - i) = E = \text{Bild}(T + i)$, so ist T selbstadjungiert.*

Beweis von Proposition 1.6. „ $(a) \Rightarrow (b)$ “: Es gelte (a) . Dann gilt: $\langle y, Tx \rangle_{\mathfrak{A}} = y^*T(x) = T(y)^*x = \langle Ty, x \rangle_{\mathfrak{A}}$ für alle $x, y \in D(T)$. Somit folgt $T \subseteq T^*$, und nach Proposition 1.7 ist T selbstadjungiert.

Da $-i + T$ und $i + T$ surjektiv auf \mathfrak{A} sind, ist auch $1 + T^2 = (-i + T)(i + T)$ surjektiv und hat insbesondere dichtes Bild.

„ $(b) \Rightarrow (a)$ “: Es gelte (b) . Da T wegen $T = T^*$ regulär ist, sind $T + i$ und $T - i$ nach [Lan95], Lemma 9.7, injektiv und nach [Lan95], Lemma 9.8, surjektiv auf \mathfrak{A} . Da $T + i$ und $T - i$ abgeschlossen sind, folgt mit [Wer07], Satz IV.4.4: $-i, i \in \rho(T)$. Weiter gilt: $y^*T(x) = \langle y, Tx \rangle_{\mathfrak{A}} = \langle Ty, x \rangle_{\mathfrak{A}} = T(y)^*x$ für alle $x, y \in D(T)$. \square

Man kann reguläre Operatoren wie folgt charakterisieren:

Satz 1.8 ([Kus97], Theorem 1.5). *Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Sei $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ dicht definiert. Dann ist T genau dann regulär, wenn ein $z \in \mathbb{B}(E, F)$ mit $\|z\| \leq 1$ so existiert, dass $D(T) = (1 - z^*z)^{1/2}E$ und $T((1 - z^*z)^{1/2}x) = zx$ für alle $x \in E$ gilt.*

Definition 1.9. Die Abbildung z im obigen Satz ist eindeutig definiert, wird mit z_T bezeichnet und z -**Transformierte** von T genannt.

Im folgenden notieren wir einige Beispiele regulärer Operatoren:

Beispiel 1.10. (i) *Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Dann gilt:*

$$\mathbb{B}(E, F) = \{T \in \mathcal{R}(E, F) ; D(T) = E\}.$$

(ii) *Ist \mathfrak{A} unital, so gilt: $\mathcal{R}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{A}$.*

(iii) *Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum. Es gilt: $\mathcal{R}(C_0(\Omega)) \cong C(\Omega)$. Genauer hat man: Sei*

$$M_f : D(M_f) \subseteq C_0(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega), g \mapsto fg,$$

1.1. REGULÄRE OPERATOREN

für alle $f \in C(\Omega)$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}(C_0(\Omega)), f \mapsto M_f,$$

bijektiv auf $\mathcal{R}(C_0(\Omega))$ mit $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$ für alle $f \in C(\Omega)$.

(iv) Sei H ein Hilbertraum. Dann gibt es eine bijektive Abbildung Ψ von $\mathcal{R}(\mathcal{K}(H))$ auf die Menge der dicht definierten, abgeschlossenen Operatoren auf H mit der Eigenschaft: $\Psi(T^*) = \Psi(T)^*$ für alle $T \in \mathcal{R}(\mathcal{K}(H))$.

Beweis. (i): [Kus97], Result 1.7.

(ii): [Lan95], S. 117.

(iii): [Wor91], Example 2.

(iv): [Wor91], Example 3. □

Wir erinnern an die folgende

Definition 1.11. Sei \mathfrak{B} eine Algebra.

- (i) Unter einem **Multiplikator** (bzw. **Bizentralisator**) auf \mathfrak{B} versteht man ein Paar (S, T) , wobei S und T Funktionen von \mathfrak{B} nach \mathfrak{B} sind, derart, dass $aS(b) = T(a)b$ für alle $a, b \in \mathfrak{B}$ gilt.
- (ii) Die Menge aller Multiplikatoren auf \mathfrak{B} wird mit $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ bezeichnet.

Proposition 1.12 ([LT76], S. 5). Sei \mathfrak{B} eine Algebra. Dann ist $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$, versehen mit der Multiplikation $(S, T) \cdot (U, V) = (S \circ U, V \circ T)$, eine Algebra. Falls \mathfrak{B} eine $*$ -Algebra ist, so wird durch $(S, T) \mapsto (T^*, S^*)$, wobei $S^*(a) := S(a^*)^*$ für alle $a \in \mathfrak{B}$ ist, eine Involution auf $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ definiert.

Nach Beispiel 1.10.(i) gilt $\mathcal{M}(\mathfrak{A}) \cong \mathbb{B}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathfrak{A})$, also kann man einen regulären Operator als einen unbeschränkten Multiplikator auffassen.

Die Abbildungen T und z_T hängen wie folgt zusammen:

Proposition 1.13 (Vgl. [Kus97], Proposition 7.21 und Proposition 7.22). Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Sei $T \in \mathcal{R}(E, F)$. Dann gilt:

- (i) $1 + T^*T$ ist invertierbar mit Inversem $S \in \mathbb{B}(E)$ und $S \geq 0$.
- (ii) $(1 + T^*T)^{-1} = 1 - z_T^* z_T$.
- (iii) $z_T = T \left((1 + T^*T)^{-1} \right)^{1/2}$ und $T = z_T \left((1 - z_T^* z_T)^{1/2} \right)^{-1}$.

Für die Abbildung T^{**} gilt:

Proposition 1.14 ([Lan95], Corollary 9.4). *Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Sei $T \in \mathcal{R}(E, F)$. Dann gilt: $T^{**} = T$.*

Da nicht-ausgeartete $*$ -Homomorphismen eine wichtige Rolle im nächsten Abschnitt spielen werden, erinnern wir an diesen Begriff:

Definition 1.15. Sei \mathfrak{B} eine C^* -Algebra und E ein Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} . Ein $*$ -Homomorphismus $\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(E)$ wird **nicht-ausgeartet** genannt, falls $[\alpha(\mathfrak{B})E]$ dicht in E liegt.

Für einen beliebigen nicht-ausgearteten $*$ -Homomorphismus $\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(E)$ ergibt sich mit einer Verallgemeinerung des Faktorisierungssatzes von Cohen ([HR90], Theorem 32.22): $E = \{\alpha(b)x; b \in \mathfrak{B}, x \in E\}$.

Bei der Untersuchung von Operatoren auf Hilbert- C^* -Moduln ist die folgende Topologie wichtig:

Definition 1.16. Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Die **strikte Topologie** auf $\mathbb{B}(E, F)$ ist die Topologie, die durch die Halbnormen

$$p_x : \mathbb{B}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}, T \mapsto \|Tx\|, \quad \text{und} \quad q_y : \mathbb{B}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}, T \mapsto \|T^*y\|,$$

für alle $x \in E$ und $y \in F$ definiert wird.

Identifiziert man $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ mit $\mathbb{B}(\mathfrak{A})$, so erhält man, dass die strikte Topologie auf $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ durch die Halbnormen

$$p_a : \mathcal{M}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|ax\|, \quad \text{und} \quad q_b : \mathcal{M}(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|bx\|,$$

für alle $a, b \in \mathfrak{A}$ gegeben ist.

Man kann nicht-ausgeartete $*$ -Homomorphismen wie folgt charakterisieren:

Proposition 1.17 (Vgl. [Lan95], Proposition 2.5, und [RW98], Proposition 2.50). *Sei \mathfrak{B} eine C^* -Algebra und E ein Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} . Für jeden $*$ -Homomorphismus $\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(E)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) α ist nicht-ausgeartet.
- (b) Es existiert ein eindeutiger unitaler $*$ -Homomorphismus $\bar{\alpha} : \mathcal{M}(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{B}(E)$, der α fortsetzt und strikt stetig auf der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})}(0, 1)$ ist.

1.1. REGULÄRE OPERATOREN

- (c) Für jede approximative Eins $(e_\lambda)_\lambda$ von \mathfrak{B} gilt: $\alpha(e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} \text{id}_E$ strikt.
- (d) Es existiert eine approximative Eins $(e_\lambda)_\lambda$ von \mathfrak{B} so, dass gilt: $\alpha(e_\lambda) \xrightarrow{\lambda} \text{id}_E$ strikt.

Die Fortsetzung $\bar{\alpha}$ aus (b) wird häufig mit α bezeichnet.

Mit Hilfe von nicht-ausgearteten $*$ -Homomorphismen erhält man reguläre Operatoren:

Proposition 1.18 ([Lan95], Proposition 10.7). *Sei \mathfrak{B} eine C^* -Algebra, E ein Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} und $\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(E)$ ein nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismus. Sei $T \in \mathcal{R}(\mathfrak{B})$. Dann findet man einen regulären Operator $\alpha(T)$ auf E mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\text{Bild}(\alpha(a)) \subseteq D(\alpha(T))$ für alle $a \in D(T)$,
- (ii) $\alpha(T)\alpha(a) = \alpha(Ta)$ für alle $a \in D(T)$,
- (iii) $\alpha(z_T) = z_{\alpha(T)}$ und
- (iv) $\alpha(T^*) = \alpha(T)^*$.

Für selbstadjungierte reguläre Operatoren hat man den folgenden Funktionalkalkül ([Lan95], Theorem 10.9):

Satz 1.19 (Funktionalkalkül). *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} und $T \in \mathcal{R}(E)$ selbstadjungiert. Sei $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \lambda$, und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \lambda(1 + \lambda^2)^{-1/2}$. Dann existiert ein $*$ -Homomorphismus $\varphi_T : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{R}(E)$ derart, dass $\varphi_T(\iota) = T$ und $\varphi_T(f) = z_T$ gilt.*

In [Kus97], Abschnitt 3, (siehe auch [Wor91], Abschnitt 1) wird ein Funktionalkalkül für normale reguläre Operatoren eingeführt, wobei ein Operator $T \in \mathcal{R}(E)$ normal heißt, falls z_T ein normales Element von $\mathbb{B}(E)$ ist.

Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $T \in \mathcal{R}(E)$ selbstadjungiert. Es gilt:

$$\varphi_T(\mathbb{1})|_{\varphi_T(C_0(\mathbb{R}))E} = \text{id}_{\varphi_T(C_0(\mathbb{R}))E}.$$

Somit hat man:

$$\varphi_T(\mathbb{1}) = \text{id}_E. \tag{1.1.1}$$

Wie man dem Beweis von [Lan95], Theorem 10.9, entnimmt, ist $\varphi_T|_{C_0(\mathbb{R})} : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ ein nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismus. Mit [Lan95], Proposition 2.1, folgt:

$$\varphi_T(C_b(\mathbb{R})) \subseteq \mathbb{B}(E). \quad (1.1.2)$$

Ist $T \in \mathbb{B}(E)$ selbstadjungiert, so kann man das Spektrum $\sigma(T)$ von T wie folgt beschreiben:

Lemma 1.20 (Vgl. [Kus97], Lemma 3.2). *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $T \in \mathbb{B}(E)$ selbstadjungiert. Dann gilt:*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} ; \forall f \in \text{Kern}(\varphi_T) : f(\lambda) = 0\}.$$

Für das Spektrum eines selbstadjungierten regulären Operators wird die folgende Definition eingeführt, die nach dem vorherigen Lemma konsistent zur Definition des Spektrums für selbstadjungierte Operatoren aus $\mathbb{B}(E)$ ist:

Definition 1.21. Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $T \in \mathcal{R}(E)$ selbstadjungiert. Dann ist das **Spektrum** von T definiert als die Menge

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} ; \forall f \in \text{Kern}(\varphi_T) : f(\lambda) = 0\}.$$

Offensichtlich ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} . Außerdem gilt: $\sigma(T) \neq \emptyset$ ([Kus97], S. 10).

Satz 1.22 (Vgl. [Kus97], Theorem 3.4). *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $T \in \mathcal{R}(E)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmter nicht-ausgearteter, injektiver $*$ -Homomorphismus $\psi_T : C_0(\sigma(T)) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ derart, dass $\psi_T(\iota) = T$ gilt, wobei $\iota : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \lambda$, sei und $\psi_T(\iota)$ wie in Proposition 1.18 definiert.*

Ist $f : D(f) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt auf $\sigma(T)$ mit $\sigma(T) \subseteq D(f)$, so gilt:

$$\overline{\psi_T(f|_{\sigma(T)})} \in \mathbb{B}(E) \quad (1.1.3)$$

([Kus97], S. 10).

Proposition 1.23 (Vgl. [Kus97], Lemma 3.6). *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $T \in \mathcal{R}(E)$ selbstadjungiert. Dann gilt: $\varphi_T(f) = \psi_T(f|_{\sigma(T)})$ für alle $f \in C(\mathbb{R})$.*

Man beachte, dass in der obigen Proposition $\psi_T(f|_{\sigma(T)})$ mittels Proposition 1.18 definiert wird, da nach Beispiel 1.10 gilt: $f|_{\sigma(T)} \in C(\sigma(T)) \cong \mathcal{R}(C_0(\sigma(T)))$.

1.2 Der Satz von Stone für Hilbert- C^* -Moduln

In diesem Abschnitt übertragen wir Aussagen über C_0 -Gruppen aus unitären Elementen aus dem Artikel [HQVK92], die dort für C^* -Algebren formuliert sind, auf Hilbert- C^* -Moduln. Insbesondere beweisen wir eine Variante des Satzes von Stone für Hilbert- C^* -Moduln.

Erinnerung 1.24. *Operatorgruppen werden in Definition B.1 definiert. Eine Operatorgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf einem Banachraum X heißt stark stetig oder C_0 -Gruppe, falls gilt: $\lim_{t \rightarrow 0} T_t x = x$ für alle $x \in X$.*

Definition 1.25. Es sei E ein Hilbert- C^* -Modul und Ω ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{B}(E)$ heißt **strikt stetig**, falls die Abbildungen $\Omega \ni \omega \mapsto f(\omega)x$ und $\Omega \ni \omega \mapsto f(\omega)^*x$ für alle $x \in E$ stetig sind.

Proposition 1.26. *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Operatorgruppe auf E mit $U_t \in \mathbb{B}(E)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist stark stetig.
- (b) $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist strikt stetig.

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“ folgt mit der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) wegen $U_t^* = U_{-t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. „(b) \Rightarrow (a)“ ist offensichtlich. \square

In dem Artikel [HQVK92] werden stets strikt stetige Gruppen mit unitären Elementen aus $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ betrachtet, die wegen der obigen Proposition das gleiche sind wie C_0 -Gruppen mit unitären Elementen aus $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$.

Die folgende Proposition stellt eine Verallgemeinerung einer Aussage aus [HQVK92], S. 229, von C^* -Algebren auf Hilbert- C^* -Moduln dar:

Proposition 1.27. *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $h \in \mathcal{R}(E)$ selbstadjungiert. Definiere $e_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \exp(i\lambda t)$, und $U_t := \varphi_h(e_t) = \exp(ith)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf E mit $U_t \in \mathbb{B}(E)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Zum Beweis formulieren wir das folgende

Lemma 1.28. *Es gilt für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$: $\|e_t f - f\|_\infty \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$.*

Beweis. Sei $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann findet man ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass gilt: $\|f|_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $M := \|f\|_\infty + 1$. Man hat: $e^{ita} \rightarrow 1$ für $t \rightarrow 0$. Somit findet man ein $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass gilt:

$$\forall t \in]0, t_0[: |e^{ita} - 1| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Sei im folgenden $t \in]0, t_0[$. Man hat:

$$\|e_t f - f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1| |f(\lambda)|.$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Fall:* $\lambda \in [-a, a]$. Dann gilt:

$$|e^{it\lambda} - 1| |f(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

2. *Fall:* $\lambda \notin [-a, a]$. Man hat:

$$|e^{it\lambda} - 1| |f(\lambda)| \leq \varepsilon.$$

Somit ergibt sich: $\|e_t f - f\|_\infty \leq \varepsilon$. □

Beweis von Proposition 1.27. Mit (1.1.2) erhält man: $U_t = \varphi_h(e_t) \in \mathbb{B}(E)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da φ_h nach dem Funktionalkalkül für reguläre Operatoren (Satz 1.19) ein $*$ -Homomorphismus ist, folgt: $U_s U_t = U_{s+t}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Nach (1.1.1) gilt $\varphi_h(\mathbb{1}) = \text{id}_E$. Somit folgt

$$U_t^* U_t = \text{id}_E = U_t U_t^*$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, also ist U_t unitär.

Es bleibt zu zeigen: $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist stark stetig.

Man hat: $e_t \in C_b(\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}(C_0(\mathbb{R}))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 1.28 gilt: $e_t \rightarrow \mathbb{1}$ strikt für $t \rightarrow 0$. Da φ_h nach Proposition 1.17 (Charakterisierung nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismen) auf der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}_{C_b(\mathbb{R})}(0, 1)$ strikt stetig ist, folgt:

$$U_t = \varphi_h(e_t) \rightarrow \varphi_h(\mathbb{1}) = \text{id}_E = U_0 \quad \text{strikt für } t \rightarrow 0.$$

Damit ist $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ strikt stetig in 0. Mit der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) folgt, dass $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ stark stetig ist. □

Die beiden folgenden Sätze sind Verallgemeinerungen von [HQVK92], Theorem 2.1 und Proposition 2.2, von C^* -Algebren auf Hilbert- C^* -Moduln und ergeben zusammen eine Variante des Satzes von Stone. Beide Beweise enthalten Anpassungen an die Hilbert- C^* -Modul-Situation und werden ausführlicher als in [HQVK92] dargestellt.

1.2. DER SATZ VON STONE FÜR HILBERT- C^* -MODULN

Satz 1.29 (Satz von Stone). *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf E mit $U_t \in \mathbb{B}(E)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- (i) *Es existiert ein selbstadjungiertes $h \in \mathcal{R}(E)$ derart, dass $U_t = \varphi_h(e_t) = \exp(ith)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.*
- (ii) *Ist $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ normstetig, so ist $h \in \mathbb{B}(E)$.*

Beweis. (i): Mit $C^*(\mathbb{R})$ sei die Gruppen- C^* -Algebra der lokalkompakten Gruppe \mathbb{R} bezeichnet, also die Vervollständigung von $C_c(\mathbb{R})$ bezüglich der sogenannten universellen C^* -Norm. Die duale Gruppe der lokalkompakten Gruppe \mathbb{R} wird als $\hat{\mathbb{R}}$ notiert. Es gilt nach [Fol95], Theorem 4.5: $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$. Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\hat{\mathbb{R}}) \cong C_0(\mathbb{R})$ lässt sich nach [RW98], Example C.20, zu einem $*$ -Isomorphismus $\hat{\mathcal{F}} : C^*(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} C_0(\mathbb{R})$ auf $C_0(\mathbb{R})$ fortsetzen.

Nach [RW98], Proposition C.17, wird für alle $f \in C_c(\mathbb{R})$ durch

$$\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) U_t dt$$

ein wohldefinierter Operator in $\mathbb{B}(E)$ definiert, und α lässt sich zu einem nicht-ausgearteten $*$ -Homomorphismus $\hat{\alpha} : C^*(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ fortsetzen. Nach Proposition 1.17 (Charakterisierung nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismen) lässt sich $\hat{\alpha}$ zu einem $*$ -Homomorphismus $\check{\alpha} : \mathcal{M}(C^*(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ fortsetzen. Sei $t \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\lambda_t : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R}), f \mapsto (s \mapsto f(s - t)).$$

Für alle $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ und $s \in \mathbb{R}$ erhält man wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes:

$$\begin{aligned} ((\lambda_t f) * g)(s) &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda_t f)(y) g(s - y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y - t) g(s - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s - x) (\lambda_t g)(x) dx = (f * (\lambda_t g))(s). \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\lambda_t \in \mathcal{M}(L^1(\mathbb{R}))$. Außerdem gilt: $\|\lambda_t\| = 1$.

Weiterhin gibt es eine norm-verkleinernde, lineare Injektion von $\mathcal{M}(L^1(\mathbb{R}))$ nach $\mathcal{M}(C^*(\mathbb{R}))$ (vgl. [Fol95], Proposition 4.17). Indem man ein beliebiges $f \in C^*(\mathbb{R})$ durch Elemente aus $L^1(\mathbb{R})$ approximiert, definiert man $\hat{\lambda}_t \in \mathcal{M}(C^*(\mathbb{R}))$ mit Hilfe von λ_t .

Für alle $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $x \in E$ erhält man mit der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes:

$$\begin{aligned} \check{\alpha}(\hat{\lambda}_t) \alpha(f) x &= \alpha(\lambda_t f) x = \int_{\mathbb{R}} f(s - t) U_s x ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(r) U_{r+t} x dr = U_t \alpha(f) x. \end{aligned}$$

Da $C_c(\mathbb{R})$ dicht in $C^*(\mathbb{R})$ liegt, folgt:

$$\check{\alpha}(\hat{\lambda}_t) = U_t. \quad (1.2.1)$$

Da es eine Einbettung von $C_0(\mathbb{R})$ in $\mathcal{M}(C_0(\mathbb{R})) \cong C_b(\mathbb{R})$ gibt, kann man $\tilde{\mathcal{F}} : C^*(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}(C_0(\mathbb{R}))$ betrachten. Nach Proposition 1.17 (Charakterisierung nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismen) ist $\tilde{\mathcal{F}}$ nicht-ausgeartet, kann also zu einem $*$ -Homomorphismus $\check{\mathcal{F}} : \mathcal{M}(C^*(\mathbb{R})) \rightarrow \mathcal{M}(C_0(\mathbb{R}))$ fortgesetzt werden.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{B}(E) & & \\
 & \nearrow \check{\alpha} & \uparrow \hat{\alpha} & \nwarrow \beta & \nearrow \check{\beta} = \varphi_h|_{C_b(\mathbb{R})} \\
 \mathcal{M}(C^*(\mathbb{R})) & \hookleftarrow C^*(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & C_0(\mathbb{R}) & \hookrightarrow \mathcal{M}(C_0(\mathbb{R}))
 \end{array}$$

$\check{\mathcal{F}}$

Es gilt:

$$\check{\mathcal{F}}(\hat{\lambda}_t) = e_t. \quad (1.2.2)$$

Da $\hat{\alpha}$ nicht-ausgeartet und $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ bijektiv ist, ist $\beta := \hat{\alpha} \circ \tilde{\mathcal{F}}^{-1} : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ ein nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismus, den man nach Proposition 1.17 zu einem $*$ -Homomorphismus $\check{\beta} : \mathcal{M}(C_0(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ fortsetzen kann. Sei $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \lambda$. Nach [Wor91], Example 2, oder Beispiel 1.10 gilt $\mathcal{R}(C_0(\mathbb{R})) \cong C(\mathbb{R})$, also $\iota \in \mathcal{R}(C_0(\mathbb{R})) \cong C(\mathbb{R})$. Somit wird nach [Lan95], Proposition 10.7, oder Proposition 1.18 durch $h := \beta(\iota)$ ein regulärer Operator auf E definiert, und es gilt $\beta(\iota^*) = \beta(\iota)^*$, also ist h selbstadjungiert. Weil $\varphi_h|_{C_0(\mathbb{R})} : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ und β nicht-ausgeartete $*$ -Homomorphismen sind mit $\varphi_h(\iota) = h = \beta(\iota)$, folgt mit [Kus97], Result 6.3: $\varphi_h|_{C_0(\mathbb{R})} = \beta$. Da ein nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismus eine eindeutige Fortsetzung auf die Multiplikatoralgebra besitzt ([Lan95], Proposition 2.1, oder Proposition 1.17), gilt $\varphi_h|_{C_b(\mathbb{R})} = \check{\beta}$ und $\check{\beta} \circ \check{\mathcal{F}} = \check{\alpha}$. Zusammen mit (1.2.2) und (1.2.1) ergibt sich:

$$\exp(i t h) = \varphi_h(e_t) = \check{\beta}(e_t) = \check{\beta}(\check{\mathcal{F}}(\hat{\lambda}_t)) = \check{\alpha}(\hat{\lambda}_t) = U_t.$$

(ii): Mit [RW98], Proposition 2.50, folgt, dass $\overline{\psi_h} : C_b(\sigma(h)) \rightarrow \mathbb{B}(E)$ ein injektiver $*$ -Homomorphismus ist, also eine Isometrie. Zusammen mit Proposition 1.23 erhält man:

$$\|U_t - \text{id}_E\| = \|\varphi_h(e_t - \mathbb{1})\| = \|\overline{\psi_h}((e_t - \mathbb{1})|_{\sigma(h)})\| = \|(e_t - \mathbb{1})|_{\sigma(h)}\|_{\infty}.$$

1.2. DER SATZ VON STONE FÜR HILBERT- C^* -MODULN

Da $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ normstetig ist, findet man ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass gilt:

$$\forall t \in]-\delta, \delta[\quad \forall \lambda \in \sigma(h) : |\exp(it\lambda) - 1| < \frac{1}{2}.$$

Somit ist $\sigma(h)$ beschränkt. Daher ist $\iota : \sigma(h) \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \lambda$, beschränkt, also folgt mit (1.1.3): $h = \psi_h(\iota) \in \mathbb{B}(E)$. \square

Wie im klassischen Satz von Stone für Hilberträume ist im obigen Satz ih der Erzeuger der C_0 -Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$, die aus unitären Elementen besteht:

Satz 1.30. *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul und $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf E mit $U_t \in \mathbb{B}(E)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $h \in \mathcal{R}(E)$ selbstadjungiert so, dass $U_t = \varphi_h(e_t) = \exp(ith)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist ih der Erzeuger der C_0 -Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$, das heißt, $ih = H$, wobei der Operator H auf der Menge*

$$D(H) = \left\{ x \in E ; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t x - x}{t} \text{ existiert} \right\} \quad \text{durch} \quad Hx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t x - x}{t}$$

für alle $x \in E$ definiert wird.

Im Beweis verwenden wir das folgende

Lemma 1.31. *Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definiere*

$$d_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \begin{cases} \frac{\exp(it\lambda) - 1}{it\lambda}, & \text{falls } \lambda \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt:

(i) $d_t \in C_0(\mathbb{R})$.

(ii) Für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$ hat man:

$$\|d_s f - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für } s \rightarrow 0.$$

Beweis. (i): Es gilt

$$d_t(\lambda) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (it\lambda)^n}{it\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (it\lambda)^{n-1}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, also folgt: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} d_t(\lambda) = 1$. Somit ist d_t stetig. Da $\exp(it \operatorname{id}_{\mathbb{R}}) - \mathbb{1}$ beschränkt ist, erhält man: $d_t \in C_0(\mathbb{R})$.

(ii): Sei $f \in C_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ und $g := d_1 - \mathbb{1} \in C_b(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\|d_t f - f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |((d_t - \mathbb{1})f)(\lambda)| = \sup_{\mu \in \mathbb{R}} \left| g(\mu) f\left(\frac{\mu}{t}\right) \right|,$$

daher wird im folgenden der letzte Ausdruck untersucht.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann findet man ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|f|_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]}\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|}$. Da g stetig ist mit $\lim_{\mu \rightarrow 0} g(\mu) = 0$, findet man ein $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|g|_{[-b, b]}\| \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|}$.

Setze $t_0 := \frac{b}{a}$. Sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $t \in]0, t_0[$.

1. Fall: $\mu \in [-b, b]$. Man erhält: $|g(\mu)f(\frac{\mu}{t})| \leq \varepsilon$.

2. Fall: $\mu \notin [-b, b]$. Wegen $|\frac{\mu}{t}| \geq |\frac{\mu}{t_0}| = a \frac{|\mu|}{b} \geq a$ gilt: $|g(\mu)f(\frac{\mu}{t})| \leq \varepsilon$. \square

Beweis von Satz 1.30. „ $ih \subseteq H$ “: Sei $x \in D(h)$. Definiere

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto (1 + \lambda^2)^{-1/2},$$

also $g \in C_0(\mathbb{R})$. Nach [Lan95], S. 107, gilt $\varphi_h(g) = (1 + h^*h)^{-1/2} \in \mathbb{B}(E)$ und $\text{Bild}(\varphi_h(g)) = D(h)$. Somit findet man ein $y \in E$ mit $x = \varphi_h(g)y$. Es gilt:

$$\frac{U_t x - x}{it} = \frac{\varphi_h(e_t)\varphi_h(g)y - \varphi_h(g)y}{it} = \varphi_h\left(\frac{(e_t - \mathbb{1})g}{it}\right)y \quad (1.2.3)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit Lemma 1.31 erhält man

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{\exp(it\lambda) - 1}{it} - \lambda \right) \frac{f(\lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right| \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left| \left(\frac{\exp(it\lambda) - 1}{it\lambda} - 1 \right) f(\lambda) \right| \frac{|\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |(d_t f - f)(\lambda)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$, also gilt:

$$\frac{(e_t - \mathbb{1})g}{it} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \text{id}_{\mathbb{R}} \cdot g \quad \text{strikt.} \quad (1.2.4)$$

Nach dem Funktionalkalkül für reguläre Operatoren (Satz 1.19) ist $\varphi_h : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{R}(E)$ ein $*$ -Homomorphismus. Ferner ist $\varphi_h|_{C_0(\mathbb{R})}$ nicht-ausgeartet (siehe den Beweis von [Lan95], Theorem 10.9). Außerdem ist φ_h nach Proposition 1.17 (Charakterisierung nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismen) strikt stetig auf $\overline{B}_{C_b(\mathbb{R})}(0, 1)$. Weiter gilt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{(e_t - \mathbb{1})g}{it} \right)(\lambda) \right| &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \frac{\exp(it\lambda) - 1}{it\sqrt{1 + \lambda^2}} \right| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left| \frac{\exp(it\lambda) - 1}{t\lambda} \right| \\ &= \sup_{r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{|\exp(ir) - 1|}{|r|} \leq 1. \end{aligned}$$

1.2. DER SATZ VON STONE FÜR HILBERT- C^* -MODULN

Also folgt: $\frac{(e_t - \mathbb{1})g}{it} \in \overline{B}_{C_b(0,1)}(0,1)$. Man erhält mit (1.2.3) und (1.2.4):

$$\begin{aligned} -iHx &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t x - x}{it} = \varphi_h \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e_t - \mathbb{1})g}{it} \right) y \\ &= \varphi_h(\text{id}_{\mathbb{R}} \cdot g)y = \varphi_h(\text{id}_{\mathbb{R}})\varphi_h(g)y = hx. \end{aligned}$$

„ih $\supseteq H$ “: Sei $x \in D(H)$. Sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine approximative Eins in $C_0(\mathbb{R})$ so, dass $f_m \in C_c(\mathbb{R})$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist. Nach Proposition 1.17 gilt:

$$\varphi_h(f_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \text{id}_E \quad \text{strikt.} \quad (1.2.5)$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definiere $c_n := d_{1/n} \in C_0(\mathbb{R})$, wobei $d_{1/n}$ in Lemma 1.31 definiert wird. Somit folgt für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

$$x_{n,m} := \varphi_h(c_n f_m)x = \varphi_h(c_n)\varphi_h(f_m)x \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi_h(c_n)x =: x_n. \quad (1.2.6)$$

Es gilt nach Satz 1.19: $\varphi_h(\text{id}_{\mathbb{R}}) = h$. Nach Beispiel 1.10 ist $C(\mathbb{R}) \cong \mathcal{R}(C_0(\mathbb{R}))$ unter der Abbildung $f \mapsto M_f : D(M_f) \subseteq C_0(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}), g \mapsto fg$, also entspricht $\text{id}_{\mathbb{R}}$ gerade $M_{\text{id}_{\mathbb{R}}}$.

Mit [Lan95], Proposition 10.7, oder Proposition 1.18 folgt:

$$\forall \alpha \in C_c(\mathbb{R}) \subseteq D(M_{\text{id}_{\mathbb{R}}}) : \text{Bild}(\varphi_h(\alpha)) \subseteq D(\varphi_h(\text{id}_{\mathbb{R}})) = D(h).$$

Wegen $c_n f_m \in C_c(\mathbb{R})$ ergibt sich somit: $x_{n,m} = \varphi_h(c_n f_m)x \in D(h)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Mit (1.2.5) erhält man:

$$\begin{aligned} hx_{n,m} &= \varphi_h(\text{id}_{\mathbb{R}})\varphi_h(c_n f_m)x \\ &= \varphi_h(\text{id}_{\mathbb{R}} \cdot c_n)\varphi_h(f_m)x \longrightarrow \varphi_h(c_n \cdot \text{id}_{\mathbb{R}})x \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Weil h abgeschlossen ist, folgt mit (1.2.6): $x_n \in D(h)$ und $hx_n = \varphi_h(c_n \cdot \text{id}_{\mathbb{R}})x$.

Da nach Lemma 1.31 gilt $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}$ strikt und da φ_h nach Proposition 1.17 (Charakterisierung nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismen) strikt stetig auf $\overline{B}_{C_b(\mathbb{R})}(0,1)$ ist, erhält man mit (1.1.1):

$$x_n = \varphi_h(c_n)x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_h(\mathbb{1})x = x.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} hx_n &= \varphi_h(c_n \cdot \text{id}_{\mathbb{R}})x = \varphi_h \left(\frac{e_{1/n} - \mathbb{1}}{i/n} \right) x \\ &= \frac{(\varphi_h(e_{1/n})\varphi_h(\mathbb{1}) - \varphi_h(\mathbb{1}))x}{i/n} = \frac{U_{1/n}x - x}{i/n}. \end{aligned}$$

Wegen $x \in D(H)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} hx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{1/n}x - x}{i/n} = -iHx.$$

Da h abgeschlossen ist, folgt: $x \in D(h)$ und $ihx = Hx$. \square

1.3 Zusammenhang zwischen regulären Operatoren auf E und auf $E \oplus E$

Analog zur direkten Summe von Hilberträumen wird eine direkte Summe von Hilbert- C^* -Moduln definiert:

Definitions-Proposition 1.32 (Vgl. [RW98], Example 2.14). Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} .

(i) Auf dem Vektorraum $E \oplus F$ wird durch

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{E \oplus F} := \langle x_1, x_2 \rangle_E + \langle y_1, y_2 \rangle_F$$

für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \oplus F$ ein \mathfrak{A} -wertiges inneres Produkt derart definiert, dass $E \oplus F$ zu einem Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} wird, welchen wir ebenfalls mit $E \oplus F$ bezeichnen.

(ii) Es gilt für alle $x \in E$ und $y \in F$:

$$\max\{\|x\|_E, \|y\|_F\} \leq \|(x, y)\|_{E \oplus F} \leq \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}. \quad (1.3.1)$$

Notation 1.33. Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Seien $A_1 : D(A_1) \subseteq E \rightarrow E$, $A_2 : D(A_2) \subseteq F \rightarrow E$, $A_3 : D(A_3) \subseteq E \rightarrow F$ und $A_4 : D(A_4) \subseteq F \rightarrow F$ Operatoren. Definiere

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} : (D(A_1) \cap D(A_3)) \times (D(A_2) \cap D(A_4)) \subseteq E \oplus F \rightarrow E \oplus F, \\ (x, y) \mapsto (A_1x + A_2y, A_3x + A_4y).$$

Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass man zu jedem regulären Operator $T \in \mathcal{R}(E, F)$ einen selbstadjungierten regulären Operator angeben kann, nämlich $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$. Umgekehrt ist, falls \hat{T} regulär ist, auch T regulär.

Für den Beweis der folgenden beiden Propositionen formulieren wir das folgende

1.3. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN REGULÄREN OPERATOREN AUF E UND AUF $E \oplus E$

Lemma 1.34. *Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Seien $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ und $S : D(S) \subseteq F \rightarrow E$ dicht definiert und \mathfrak{A} -linear. Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & S^* \\ T^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Offensichtlich ist $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix}$ dicht definiert und \mathfrak{A} -linear.

Mit dem Index 1 (bzw. 2) bezeichnen wir die erste (bzw. zweite) Komponente eines Tupels. Für ein beliebiges $x \in F \oplus E$ gilt beispielsweise: $x = (x_1, x_2)$.

„ \subseteq “: Es gilt für alle $x \in D(\hat{T})$ und $y \in D(\hat{T}^*)$

$$\begin{aligned} \langle Tx_2, y_1 \rangle_F + \langle Sx_1, y_2 \rangle_E &= \langle \hat{T}x, y \rangle_{F \oplus E} = \langle x, \hat{T}^*y \rangle_{F \oplus E} \\ &= \langle x_1, (\hat{T}^*y)_1 \rangle_F + \langle x_2, (\hat{T}^*y)_2 \rangle_E, \end{aligned}$$

also $\langle Sx_1, y_2 \rangle_E = \langle x_1, (\hat{T}^*y)_1 \rangle_F$. Somit ist $\langle x_1, (\hat{T}^*y)_1 \rangle_F$ unabhängig von y_1 für alle $x \in D(\hat{T}), y \in D(\hat{T}^*)$, also gilt $\langle x_1, (\hat{T}^*y)_1 \rangle_F = \langle x_1, Ay_2 \rangle_E$, wobei $A : D(A) \subseteq E \rightarrow F$ sei. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ nicht-ausgeartet ist, folgt: $(\hat{T}^*y)_1 = Ay_2$ für alle $y \in D(\hat{T}^*)$. Analog erhält man: $(\hat{T}^*y)_2 = By_1$ für alle $y \in D(\hat{T}^*)$, wobei $B : D(B) \subseteq F \rightarrow E$ sei. Somit hat man $A \subseteq S^*$ und $B \subseteq T^*$, also $\hat{T}^* \subseteq \begin{pmatrix} 0 & S^* \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$.

„ \supseteq “: Es gilt für alle $x \in D(\hat{T})$ und $y \in D(T^*) \times D(S^*)$

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}x, y \rangle_{F \oplus E} &= \langle Tx_2, y_1 \rangle_F + \langle Sx_1, y_2 \rangle_E \\ &= \langle x_2, T^*y_1 \rangle_F + \langle x_1, S^*y_2 \rangle_E = \langle x, \begin{pmatrix} 0 & S^* \\ T^* & 0 \end{pmatrix} y \rangle_{F \oplus E}, \end{aligned}$$

also $\begin{pmatrix} 0 & S^* \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \subseteq \hat{T}^*$. □

Proposition 1.35. *Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Dann ist für alle $T \in \mathcal{R}(E, F)$ der Operator $\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ regulär und selbstadjungiert.*

Beweis. Setze $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$. Da T und T^* dicht definiert sind, ist wegen

$D(\hat{T}) = D(T^*) \times D(T)$ auch \hat{T} dicht definiert.

Es gilt $T^{**} = T$ ([Lan95], Corollary 9.4, oder Proposition 1.14). Damit und mit Lemma 1.34 folgt:

$$\hat{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & T^{**} \\ T^* & 0 \end{pmatrix} = \hat{T}.$$

Da T^* abgeschlossen ist, ist auch \hat{T} abgeschlossen.

Es bleibt zu zeigen: $1 + \hat{T}^*\hat{T}$ hat dichtes Bild. Es gilt:

$$(1 + \hat{T}^*\hat{T})(x, y) = ((1 + TT^*)x, (1 + T^*T)y)$$

für alle $(x, y) \in D(1 + \hat{T}^*\hat{T})$. Nach [Lan95], Corollary 9.6, ist T^* regulär. Somit folgt, dass

$$\text{Bild}(1 + \hat{T}^*\hat{T}) = \text{Bild}(1 + (T^*)^*T^*) \times \text{Bild}(1 + T^*T)$$

dicht in $F \oplus E$ liegt. □

Proposition 1.36. *Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Sei $T : D(T) \subseteq E \rightarrow F$ dicht definiert und \mathfrak{A} -linear. Ist $\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ regulär, so ist T regulär.*

Beweis. Offensichtlich ist T^* dicht definiert, und T ist abgeschlossen. Nach Lemma 1.34 gilt $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T^{**} \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$, somit erhält man:

$$\begin{aligned} (1 + \hat{T}^*\hat{T})(x, y) &= (x, y) + \hat{T}^*(Ty, T^*x) \\ &= (x, y) + (T^{**}T^*x, T^*Ty) = ((1 + T^{**}T^*)x, (1 + T^*T)y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in D(1 + \hat{T}^*\hat{T})$. Wegen $\|y\| \leq \|(x, y)\|$ für alle $(x, y) \in F \oplus E$ folgt aus der Dichtheit von $\text{Bild}(1 + \hat{T}^*\hat{T})$ in $F \oplus E$ die Dichtheit von $\text{Bild}(1 + T^*T)$ in E . □

1.4 Multiplikatoren des Pedersen-Ideals

Im vorherigen Abschnitt haben wir mit den regulären Operatoren eine Möglichkeit kennengelernt, auf einer C^* -Algebra unbeschränkte Multiplikatoren zu definieren. In diesem Abschnitt erinnern wir an einen anderen Zugang, nämlich an Multiplikatoren des Pedersen-Ideals. Es wird sich herausstellen, dass die regulären Operatoren die Multiplikatoren des Pedersen-Ideals umfassen.

Eine grundlegende Philosophie beim Studium von C^* -Algebren ist, dass diese nicht-kommutative Analoga von $C_0(\Omega)$ sind, wobei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum Ω sei. Die Multiplikatoralgebra $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ einer C^* -Algebra \mathfrak{A} entspricht bei dieser Sichtweise der Algebra $C_b(\Omega)$ der stetigen, beschränkten Funktionen auf Ω . Eine natürliche Frage ist dann: Was ist das nicht-kommutative Analogon zu der Algebra $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen auf Ω ?

1.4. MULTIPLIKATOREN DES PEDERSEN-IDEALS

Falls \mathfrak{A} unital ist, dann entspricht dieses der Situation, dass Ω kompakt ist, und daher erwartet man, dass das Analogon von $C(\Omega)$ die Algebra \mathfrak{A} selbst ist. Daher liegt das eigentliche Interesse in nicht-unitalen C^* -Algebren.

Im nicht-unitalen Fall betrachtet man die zugehörige Algebra von Multiplikatoren. Die Multiplikatoralgebra von $C_c(\Omega)$, den stetigen Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger, ist in der klassischen Situation $C(\Omega)$. Ferner ist $C_c(\Omega)$ ein minimales dichtes Ideal von $C(\Omega)$, und in der Situation von C^* -Algebren existiert dieses minimale dichte beidseitige Ideal und heißt Pedersen-Ideal von \mathfrak{A} ([Ped66], [Ped79]).

A. J. Lazar und D. C. Taylor studieren in [LT76] die Multiplikatoralgebra (Algebra der Bizenralisatoren) dieses Ideals, also unbeschränkte Multiplikatoren. N. C. Phillips ([Phi88]) vereinfacht ihre Arbeit, indem er feststellt, dass die Multiplikatoralgebra des Pedersen-Ideals eine Pro- C^* -Algebra ist, also ein inverser Limes von C^* -Algebren.

Definition 1.37. (i) Ein **Ordnungsideal** von \mathfrak{A} ist ein Unterkegel J von $\mathfrak{A}_{\geq 0}$ derart, dass gilt: $\forall x \in \mathfrak{A}_{\geq 0} \forall y \in J : x \leq y \Rightarrow x \in J$.

(ii) Ein Ordnungsideal J von \mathfrak{A} heißt **invariant**, falls $a^*Ja \subseteq J$ für alle $a \in \mathfrak{A}$ gilt.

(iii) Eine $*$ -Unteralgebra \mathfrak{B} von \mathfrak{A} heißt **hereditär**, falls $\mathfrak{B}^+ := \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_{\geq 0}$ ein Ordnungsideal und \mathfrak{B} der Vektorraumaufspann von \mathfrak{B}^+ ist.

Satz/Definition 1.38 ([LT76], Theorem 2.2). *Sei \mathfrak{J} die Menge aller dichten, invarianten Ordnungsideale von $\mathfrak{A}_{\geq 0}$ und $K_{\mathfrak{A}}^+ := \bigcap \mathfrak{J}$.*

(i) $K_{\mathfrak{A}}^+$ ist ein dichtes, invariantes Ordnungsideal von $\mathfrak{A}_{\geq 0}$.

(ii) Der Vektorraumaufspann $K_{\mathfrak{A}}$ von $K_{\mathfrak{A}}^+$ ist ein dichtes, hereditäres beidseitiges Ideal von \mathfrak{A} , welches minimal unter allen dichten beidseitigen Idealen von \mathfrak{A} ist und das **Pedersen-Ideal** von \mathfrak{A} genannt wird.

In [Ara01], Definition 1.2, wird eine Verallgemeinerung des Pedersen-Ideals auf Hilbert- C^* -Moduln E über \mathfrak{A} definiert. Genauer wird $P_E = EK_J$ Pedersen-Unterm modul von E genannt, wobei $J := \overline{\langle E, E \rangle}$ ein Ideal in \mathfrak{A} ist. Es ist aber nicht offensichtlich, wie man diese Definition auf Operatorräume verallgemeinern kann, da man beispielsweise in Operatorräumen den Begriff des Ideals nicht zur Verfügung hat.

Im folgenden werden einige Beispiele für das Pedersen-Ideal angegeben:

Beispiel 1.39. (i) Ist \mathfrak{A} eine unitale C^* -Algebra, so gilt: $K_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$.

(ii) Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann gilt: $K_{C_0(\Omega)} = C_c(\Omega)$.

(iii) Sei H ein Hilbertraum. Dann ist $K_{\mathcal{K}(H)}$ gleich der Menge der Operatoren auf H mit endlich-dimensionalem Bild.

Beweis. (i): Sei \mathfrak{A} eine unitale C^* -Algebra. Da $K_{\mathfrak{A}}$ ein dichtes beidseitiges Ideal von \mathfrak{A} ist, hat $K_{\mathfrak{A}}$ nicht-leeren Schnitt mit den invertierbaren Elementen von \mathfrak{A} . Somit folgt (i).

(ii): [LT76], Example 2.4.

(iii): [LT76], Example 2.5. □

Die Elemente der Multiplikatoralgebra $\mathcal{M}(K_{\mathfrak{A}})$ des Pedersen-Ideals bezeichnet man auch als unbeschränkte Multiplikatoren. Beispiele hierfür sind:

Beispiel 1.40 ([LT76], 4.1 und 4.2). (i) Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann gilt: $\mathcal{M}(K_{C_0(\Omega)}) \cong C(\Omega)$.

(ii) Sei H ein Hilbertraum. Dann kann man $\mathcal{M}(K_{\mathcal{K}(H)})$ mit $L(H)$ identifizieren.

Proposition 1.41 (Vgl. [LT76], S. 8). Man kann $K_{\mathfrak{A}}$, \mathfrak{A} und $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ als Unteralgebren von $\mathcal{M}(K_{\mathfrak{A}})$ auffassen.

Wie man in Beispiel 1.10.(iv) und 1.40.(ii) sieht, stimmen $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ und $\mathcal{M}(K_{\mathfrak{A}})$ i. a. nicht überein. Vielmehr sind die Multiplikatoren des Pedersen-Ideals in den regulären Operatoren enthalten:

Satz 1.42 ([Web04], Theorem 3.1). (i) Für jedes $a \in \mathcal{M}(K_{\mathfrak{A}})$ existiert ein $T \in \mathcal{R}(\mathfrak{A})$ mit $K_{\mathfrak{A}} \subseteq D(T)$ und $Tx = ax$ für alle $x \in D(T)$.

(ii) Für jedes $T \in \mathcal{R}(\mathfrak{A})$ mit $K_{\mathfrak{A}} \subseteq D(T)$ findet man ein $a \in \mathcal{M}(K_{\mathfrak{A}})$ so, dass gilt: $Tx = ax$ für alle $x \in D(T)$.

Auch wenn die Multiplikatoralgebra $\mathcal{M}(K_{\mathfrak{A}})$ des Pedersen-Ideals i. a. nicht alle regulären Operatoren enthält, hat sie gegenüber $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ den Vorteil, eine $*$ -Algebra zu sein.

Kapitel 2

Operatorräume

In diesem Kapitel wird an verschiedene Definitionen und Aussagen erinnert, die wir in dieser Arbeit verwenden. Im ersten Abschnitt werden elementare Begriffe in Operatorräumen wiederholt. Im Anschluss werden Beispiele für Operatorraumstrukturen auf verschiedenen Räumen aufgeführt. Unitale Operatorsysteme werden im dritten Abschnitt behandelt. Im vierten Abschnitt wird auf den Begriff der Injektivität für Operatorräume eingegangen. Außerdem wird an Eigenschaften der injektiven Hülle eines Operatorraumes erinnert. Ternäre Ringe von Operatoren und Tripelsysteme werden im darauffolgenden Abschnitt eingeführt, ebenso der Begriff der ternären Hülle eines Operatorraumes. Im sechsten Abschnitt werden Grundlagen der Theorie der selbstadjungierten Operatorräume notiert. Anschließend beweisen wir für solche Räume die Existenz und Eindeutigkeit einer injektiven Hülle.

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt wird an Grundlagen der Theorie der Operatorräume erinnert, also insbesondere an elementare Definitionen.

Sei X ein normierter Raum. Nach dem Satz von Hahn-Banach kann man X isometrisch in $C(\Omega)$ einbetten, wobei $\Omega = \overline{B}_{X^*}(0, 1)$ ist. Also wird X als Funktionenraum, d. h. als Untervektorraum der stetigen Funktionen auf Ω , realisiert. Analog wird ein (konkreter) Operatorraum als abgeschlossener Untervektorraum von Operatoren auf einem Hilbertraum definiert.

Definition 2.1. (i) Als einen **(konkreten) matrixnormierten Raum** bezeichnet man einen Untervektorraum X von $L(H)$, wobei H ein Hilbertraum sei.

- (ii) Ist X abgeschlossen, so spricht man von einem (**konkreten**) **Operatorraum**.

Definition 2.2. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei V ein Vektorraum. Mit $M_{m,n}(V)$ wird der Raum der $m \times n$ -Matrizen über V notiert. Setze $M_n(V) := M_{n,n}(V)$, $M_{m,n} := M_{m,n}(\mathbb{C})$ und $M_n := M_{n,n}$.

Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Durch

$$M_n(X) \subseteq M_n(L(H)) \cong L(H^n)$$

wird $M_n(X)$ mit einer Norm $\|\cdot\|_n$ versehen. Mit Hilfe solcher Normen wird ein abstrakter Operatorraum definiert.

Setze $p := \max\{m, n\}$. Wir fassen den Raum $M_{m,n}$ als Untervektorraum von M_p auf und erhalten so eine Norm auf $M_{m,n}$, die als $\|\cdot\|_{M_{m,n}}$ oder kurz als $\|\cdot\|$ notiert wird.

Definition 2.3. (i) Unter einer Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf einem \mathbb{C} -Vektorraum X versteht man eine Folge $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Normen derart, dass $\|\cdot\|_n$ eine Norm auf $M_n(X)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist.

- (ii) Ein (**abstrakter**) **matrixnormierter Raum** ist ein \mathbb{C} -Vektorraum X , der so mit einer Matrixnorm $\|\cdot\|$ versehen ist, dass gilt:

$$(N_1) \quad \|x \oplus y\|_{m+n} = \max\{\|x\|_m, \|y\|_n\}, \text{ wobei mit } x \oplus y \text{ die } (m+n) \times (m+n)\text{-Matrix } \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ bezeichnet wird,}$$

$$(N_2) \quad \|\alpha x \beta\|_n \leq \|\alpha\|_{M_{n,m}} \cdot \|x\|_m \cdot \|\beta\|_{M_{m,n}}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in M_m(X)$, $y \in M_n(X)$, $\alpha \in M_{n,m}$ und $\beta \in M_{m,n}$.

- (iii) Sei X ein matrixnormierter Raum. Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ (und damit für alle) $(M_n(X), \|\cdot\|_n)$ vollständig, so heißt X ein (**abstrakter**) **Operatorraum**.

Offensichtlich ist jede C^* -Algebra ein Operatorraum. Wir werden in Abschnitt 2.2 sehen, dass man beispielsweise Banachräume, Hilberträume und Hilbert- C^* -Moduln mit Operatorraumstrukturen versehen kann.

Definition 2.4. Seien V, W Vektorräume. Sei $\alpha : V \rightarrow W$ und $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\alpha_n : M_n(V) \rightarrow M_n(W), v \mapsto (\alpha(v_{ij}))_{i,j \in \underline{n}},$$

genannt n -te **Amplifikation** von α . Anstelle von α_n schreiben wir auch $\alpha^{(n)}$.

2.1. GRUNDLAGEN

Definition 2.5. Seien X, Y matrixnormierte Räume, sei $\alpha : X \rightarrow Y$ linear.

- (i) α heißt **vollständig kontraktiv**, wenn α_n für alle $n \in \mathbb{N}$ kontraktiv ist, d. h. $\|\alpha_n\| \leq 1$.
- (ii) α bezeichnet man als **vollständig isometrisch**, falls α_n für alle $n \in \mathbb{N}$ isometrisch ist.
- (iii) Man nennt α **vollständig beschränkt**, falls gilt:

$$\|\alpha\|_{\text{cb}} := \sup\{\|\alpha_n\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

(„cb“ steht für „completely bounded“).

- (iv) Die Menge der vollständig beschränkten Abbildungen von X nach Y wird mit $\text{CB}(X, Y)$ bezeichnet. Setze $\text{CB}(X) := \text{CB}(X, X)$.

Die Operatorräume bilden zusammen mit den vollständig beschränkten (beziehungsweise vollständig kontraktiven) Abbildungen eine Kategorie.

Wegen des folgenden Resultats wird häufig nicht zwischen abstrakten und konkreten matrixnormierten Räumen unterschieden (vgl. [ER00], Theorem 2.3.5):

Satz 2.6 (Darstellungssatz für matrixnormierte Räume). *Sei X ein abstrakter matrixnormierter Raum. Dann findet man einen Hilbertraum H , einen konkreten matrixnormierten Raum $Y \subseteq L(H)$ und eine surjektive vollständige Isometrie $\Phi : X \rightarrow Y$ auf Y .*

Wir erinnern an die folgende bekannte Abschätzung:

Lemma 2.7 ([ER00], S. 22). *Sei X ein Operatorraum und $x \in M_n(X)$. Für alle $i, j \in \underline{n}$ gilt:*

$$\|x_{ij}\| \leq \|x\|_n \leq \sum_{k,\ell=1}^n \|x_{k\ell}\|. \quad (2.1.1)$$

Aus der Abschätzung (2.1.1) folgt, dass eine Folge $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ in $M_n(X)$ genau dann konvergiert, wenn ihre Einträge $(x_{ij}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ für alle $i, j \in \underline{n}$ konvergieren.

2.2 Beispiele

Beispiele für Operatorraumstrukturen auf verschiedenen Räumen wie $C_0(\Omega)$, Banachräumen, Hilbert- C^* -Moduln und Hilberträumen werden in diesem Abschnitt angegeben.

Beispiel 2.8. Seien X, Y Operatorräume. Für alle $(x, y) \in X \oplus Y$ sei $\|(x, y)\|_{X \oplus Y, n} := \max\{\|x\|_{X, n}, \|y\|_{Y, n}\}$. Dann ist $X \oplus Y$, versehen mit der Matrixnorm $(\|\cdot\|_{X \oplus Y, n})_{n \in \mathbb{N}}$, ein Operatorraum.

Beispiel 2.9. Sei X ein Operatorraum mit Matrixnorm $(\|\cdot\|)_{n \in \mathbb{N}}$, und sei $k \in \mathbb{N}$. Da man $M_m(M_k(X))$ mit $M_{mk}(X)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ identifizieren kann, erhält man so eine Norm auf $M_m(M_k(X))$. Versehen mit dieser Norm ist $(M_k(X), (\|\cdot\|_{mk})_{m \in \mathbb{N}})$ ein Operatorraum.

Definitions-Proposition 2.10. Sei X ein Operatorraum, seien $m, n \in \mathbb{N}$. Setze $p := \max\{m, n\}$.

- (i) Die Norm auf den Matrixräumen $M_{m,n}(X)$ erhält man, indem man $M_{m,n}(X)$ als Unterraum von $M_p(X)$ auffasst. Durch den linearen Isomorphismus $M_p(M_{m,n}(X)) \cong M_{pm, pn}(X)$ erhält man eine Operatorraumstruktur auf $M_{m,n}(X)$.
- (ii) Mit $C_n(X) := M_{n,1}(X)$ wird der **Spaltenoperatorraum** über X bezeichnet („C“ für englisch „column“).

Beispiel 2.11 ([ER00], S. 50; Operatorraumstruktur auf $C_0(\Omega)$). Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\mathfrak{A} := C_0(\Omega)$. Sei $\delta : \Omega \rightarrow L(\mathfrak{A}, \mathbb{C}), \omega \mapsto (\nu \mapsto \nu(\omega))$. Versehen mit der Norm

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\{\|(f(a_{ij}))_{i,j \in \underline{n}}\|; f \in \text{Bild}(\delta)\} \\ &= \sup\{\|(a_{ij}(\omega))_{i,j \in \underline{n}}\|_{M_n}; \omega \in \Omega\} \end{aligned}$$

ist $M_n(\mathfrak{A})$ eine C^* -Algebra. Ferner gilt: $M_n(\mathfrak{A}) \cong C_0(\Omega, M_n)$.

Sei X ein Banachraum. Jede lineare Einbettung von X in $L(H)$, wobei H ein Hilbertraum sei, definiert eine Operatorraumstruktur auf X . Wenn man von einer solchen Einbettung zusätzlich verlangt, dass sie isometrisch ist, findet man unter allen solchen Einbettungen eine, die X so mit einer Operatorraumstruktur versieht, dass die entstehende Norm minimal ist (siehe die folgende Definitions-Proposition, Punkt (iv)).

2.2. BEISPIELE

Definitions-Proposition 2.12 (Vgl. [ER00], S. 47/48; minimale Operatorraumstruktur $\min(X)$). Seien X, Y Banachräume. Sei Z ein Operatorraum.

- (i) Es sei X_1^* die abgeschlossene Einheitskugel des Dualraumes X^* von X , versehen mit der schwach*-Topologie. Dann ist X_1^* ein kompakter Hausdorffraum. Die Abbildung $j : X \rightarrow C(X_1^*), x \mapsto (f \mapsto f(x))$, ist eine lineare Isometrie. Da $j(X)$ als abgeschlossener Unterraum einer C^* -Algebra die Struktur eines Operatorraumes trägt, erhält man so eine Operatorraumstruktur auf X , die man mit $\min(X)$ bezeichnet.
- (ii) Es gilt für alle $x \in M_n(X)$:

$$\|x\|_{\min(X),n} = \sup\{\|f_n(x)\|_{M_n} ; f \in X_1^*\}.$$

- (iii) Für jede lineare Abbildung $\varphi : Z \rightarrow X$ gilt:

$$\|\varphi\|_{\text{CB}(Z, \min(X))} = \|\varphi\|_{L(Z, X)}.$$

- (iv) Es gilt: $\|x\|_{\min(Z),n} \leq \|x\|_n$ für alle $x \in M_n(Z)$.
- (v) Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Kontraktion. Dann ist $\varphi : \min(X) \rightarrow Y$ eine Kontraktion und

$$\varphi : \min(X) \rightarrow \min(Y)$$

vollständig kontraktiv.

Hilbert- C^* -Moduln sind mit einer natürlichen Operatorraumstruktur ausgestattet (vgl. [BLM04], 8.2.1):

Satz 2.13 (Operatorraumstruktur auf Hilbert- C^* -Moduln). *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für alle $x \in M_n(E)$ die Matrix $(\sum_{k=1}^n \langle x_{ki}, x_{kj} \rangle)_{i,j \in \underline{n}}$ ein positives Element in $M_n(\mathfrak{A})$, und E , versehen mit der durch*

$$\|x\|_n = \left\| \left(\sum_{k=1}^n \langle x_{ki}, x_{kj} \rangle \right)_{i,j} \right\|^{1/2}$$

gegebenen Matrixnorm, ein Operatorraum.

Für ein Hilbert- C^* -Modul E hängt die Norm von $E \oplus E$ (siehe Definitions-Proposition 1.32) und von $C_2(E)$, wobei E bei $C_2(E)$ als Operatorraum aufgefasst wird, wie folgt zusammen:

Proposition 2.14. *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul über \mathfrak{A} . Dann gilt: $E \oplus E \cong C_2(E)$. Genauer ist $\varphi : E \oplus E \rightarrow C_2(E), x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ eine vollständige Isometrie.*

Beweis. 1. Fall: $n = 1$. Sei $x \in E \oplus E$. Mit Satz 2.13 (Operatorraumstruktur auf E) erhält man:

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\|_{C_2(E)}^2 &= \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}}_{:=y} \right\|_{M_2(E)}^2 = \left\| \left(\sum_{k=1}^2 \langle y_{ki}, y_{kj} \rangle_E \right)_{i,j} \right\|_{M_2(\mathfrak{A})} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{M_2(\mathfrak{A})} \\ &= \langle x, x \rangle = \|x\|_{E \oplus E}^2. \end{aligned}$$

2. Fall: $n = 2$. Sei $x \in M_2(E \oplus E)$. Seien $a, b \in M_2(E)$ mit $x_{ij} = (a_{ij}, b_{ij})$

für alle $i, j \in \underline{2}$. Setze $y := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mit Satz 2.13 folgt:

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(x)\|_{M_2(C_2(E))}^2 &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\|_{M_{4,2}(E)} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{M_4(E)} = \left\| \left(\sum_{k=1}^4 \langle y_{ki}, y_{kj} \rangle_E \right)_{i,j} \right\|_{M_4(\mathfrak{A})} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^4 \langle y_{k,1}, y_{k,1} \rangle & \sum_{k=1}^4 \langle y_{k,1}, y_{k,2} \rangle & 0 & 0 \\ \sum_{k=1}^4 \langle y_{k,2}, y_{k,1} \rangle & \sum_{k=1}^4 \langle y_{k,2}, y_{k,2} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{M_4(\mathfrak{A})} \\ &= \left\| \left(\sum_{k=1}^2 \langle x_{ki}, x_{kj} \rangle_{E \oplus E} \right)_{i,j} \right\|_{M_2(\mathfrak{A})} = \|x\|_{M_2(E \oplus E)}^2. \end{aligned}$$

3. Fall: $n > 2$. Der Beweis verläuft analog zum 2. Fall. \square

Definition 2.15. Sei H ein Hilbertraum. Mit \overline{H} sei der Anti-Hilbertraum von H bezeichnet, also der Hilbertraum auf der Menge H mit der Addition

2.2. BEISPIELE

von H , der Skalarmultiplikation

$$(\lambda, \xi) \mapsto \bar{\lambda}\xi$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle \bar{\xi}, \bar{\eta} \rangle = \langle \eta, \xi \rangle.$$

Hilberträume kann man mit verschiedenen Operatorraumstrukturen versehen, wie die folgenden beiden Propositionen zeigen ([ER00], S. 55 bzw. S. 54):

Proposition 2.16 (Zeilen-Hilbertoperatorraum). *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) *Sei $\Phi : \bar{H} \rightarrow H^*$ der natürliche Isomorphismus. Die natürliche Isometrie*

$$R : H \rightarrow H^{**} = L(H^*, \mathbb{C}) \cong L(\bar{H}, \mathbb{C})$$

ist gegeben durch

$$R(\zeta)(\bar{\xi}) := \Phi(\bar{\xi})(\zeta) = \langle \zeta, \xi \rangle$$

*für alle $\zeta, \xi \in H$. Da $L(\bar{H}, \mathbb{C})$ ein Operatorraum ist, wird hierdurch H mit der Struktur eines Operatorraumes versehen, der **Zeilen-Hilbertoperatorraum** genannt und mit H^r bezeichnet wird („r“ für englisch „row“).*

(ii) *Für alle $\xi \in M_{m,n}(H^r)$ gilt:*

$$\|\xi\| = \left\| \left(\sum_{k=1}^n \langle \xi_{ik}, \xi_{jk} \rangle \right)_{i,j} \right\|_{M_{m,n}(\mathbb{C})}^{1/2}.$$

Proposition 2.17 (Spalten-Hilbertoperatorraum). *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) *Definiere für alle $\xi \in H$*

$$C^\xi : \mathbb{C} \rightarrow H, a \mapsto a\xi, \quad \text{und} \quad C : H \rightarrow L(\mathbb{C}, H), \xi \mapsto C^\xi.$$

Dann ist C ein isometrischer Vektorraumisomorphismus auf $L(\mathbb{C}, H)$. Für alle $\xi \in M_n(H)$ wird durch

$$\|\xi\|_n = \|C_n(\xi)\|_n$$

*eine Matrixnorm auf H definiert, durch die H mit der Struktur eines Operatorraumes versehen wird, der **Spalten-Hilbertoperatorraum** genannt und mit H^c bezeichnet wird („c“ für englisch „column“).*

(ii) Für alle $\xi \in M_{m,n}(H^c)$ gilt:

$$\|\xi\| = \left\| \left(\sum_{k=1}^m \langle \xi_{kj}, \xi_{ki} \rangle \right)_{i,j} \right\|_{M_{m,n}(\mathbb{C})}^{1/2}.$$

2.3 Unitale Operatorsysteme

Wir erinnern in diesem Abschnitt an einige grundlegende Definitionen und Aussagen zu unitalen Operatorsystemen.

Definition 2.18. (i) Unter einem **Operatorsystem** versteht man einen abgeschlossenen, selbstadjungierten Untervektorraum der linearen, stetigen Operatoren auf einem Hilbertraum H .

(ii) Ein Operatorsystem $X \subseteq L(H)$ heißt **unital**, falls $\text{id}_H \in X$ gilt. In diesem Fall bezeichnet man id_H als Einselement von X und notiert es als e_X .

Definition 2.19. Sei $X \subseteq L(H)$ ein unitales Operatorsystem. Dann wird ein beliebiges $x \in X$ **positiv** genannt, falls x in $L(H)$ positiv ist.

Definition 2.20. Seien X, Y unitale Operatorsysteme. Dann heißt eine lineare Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$

- (i) **unital**, falls $\varphi(e_X) = e_Y$ gilt,
- (ii) **positiv**, falls die positiven Elemente von X in die positiven Elemente von Y abgebildet werden,
- (iii) **vollständig positiv**, falls φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv ist,
- (iv) **Ordnungsmonomorphismus**, falls φ injektiv ist und φ und φ^{-1} positiv sind, und
- (v) **Ordnungsisomorphismus**, falls φ ein surjektiver Ordnungsmonomorphismus ist.

Proposition 2.21 ([ER00], Corollary 5.1.2). *Seien $X \subseteq L(H), Y \subseteq L(K)$ unitale Operatorsysteme. Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine unitale, lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann vollständig positiv, wenn φ vollständig kontraktiv ist.*

2.4. INJEKTIVE OPERATORRÄUME

Auf die folgende Art und Weise kann man für jeden Operatorraum ein zugehöriges uniales Operatorsystem definieren:

Definitions-Proposition 2.22 (Vgl. [BLM04], 1.3.14 und Lemma 1.3.15).
Seien $X \subseteq L(H)$ und $Y \subseteq L(K)$ Operatorräume.

(i) Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(X) &:= \begin{pmatrix} \mathbb{C} \operatorname{id}_H & X \\ X^* & \mathbb{C} \operatorname{id}_H \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{id}_H & x \\ y^* & \mu \operatorname{id}_H \end{pmatrix} ; x, y \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \\ &\subseteq M_2(L(H)), \end{aligned}$$

versehen mit der von $L(H \oplus H) \cong M_2(L(H))$ induzierten Struktur, ein uniales Operatorsystem, genannt **Paulsen-System** von X .

(ii) Weiter ist

$$\varphi : X \rightarrow \mathcal{S}(X), x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eine vollständig isometrische Einbettung.

(iii) Sei $u : X \rightarrow Y$. Definiere

$$\mathcal{S}(u) : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y), \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{id}_H & x_1 \\ x_2^* & \mu \operatorname{id}_H \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{id}_K & u(x_1) \\ u(x_2)^* & \mu \operatorname{id}_K \end{pmatrix}.$$

Ist u vollständig kontraktiv (bzw. vollständig isometrisch), so ist $\mathcal{S}(u)$ unital und vollständig positiv (bzw. ein unitaler, vollständiger Ordnungsmonomorphismus).

Als uniales Operatorsystem, also bis auf unitale, vollständige Ordnungsisomorphismen, hängt $\mathcal{S}(X)$ nach Definitions-Proposition 2.22.(iii) nur von der Operatorraumstruktur von X ab und nicht von der Einbettung von X in $L(H)$.

2.4 Injektive Operatorräume

Eine wichtige Rolle in der Theorie der Operatorräume spielen die injektiven Operatorräume. Da wir uns mit Multiplikatoren auf Operatorräumen beschäftigen, ist für uns die injektive Hülle eines Operatorraumes von besonderem Interesse.

Definition 2.23. Ein Operatorraum Z heißt **injektiv**, falls für jeden Operatorraum X , jede vollständig kontraktive Abbildung $\varphi : X \rightarrow Z$ und für jeden Operatorraum Y , der X als abgeschlossenen Unterraum enthält, eine vollständig kontraktive Fortsetzung $\Phi : Y \rightarrow Z$ von φ existiert.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \uparrow \subseteq & \searrow \Phi & \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Z \end{array}$$

Beispiel 2.24 ([BLM04], Theorem 1.2.10). *Es seien H, K Hilberträume. Dann ist $L(H, K)$ ein injektiver Operatorraum.*

Definition 2.25. Sei X ein Operatorraum. Eine **Erweiterung** von X ist ein Paar, bestehend aus einem Operatorraum Y und einer vollständigen Isometrie $\kappa : X \rightarrow Y$.

Definition 2.26. Sei X ein Operatorraum. Dann heißt (Y, κ) **injektive Hülle** von X , falls (Y, κ) eine Erweiterung von X ist, Y injektiv ist und es keinen echten injektiven Unterraum von Y gibt, der $\kappa(X)$ enthält.

Die Konstruktion einer injektiven Hülle für einen Operatorraum X wird nicht auf dem Wege durchgeführt, dass man eine absteigende Kette $(Y_\lambda)_\lambda$ von injektiven Operatorräumen mit $X \subseteq Y_\lambda$ betrachtet und $\bigcap_\lambda Y_\lambda$ bildet, denn es ist nicht klar, dass der Schnitt wieder injektiv ist. Stattdessen benutzt man sogenannte X -Halbnormen.

Definition 2.27. Sei $X \subseteq L(H)$.

- (i) Eine Abbildung $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ heißt **X -Abbildung**, falls φ vollständig kontraktiv ist und $\varphi|_X = \text{id}_X$ erfüllt.
- (ii) Unter einer **X -Projektion** versteht man eine X -Abbildung φ , für die $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

Somit ist eine X -Projektion φ eine Projektion auf $Y := \varphi(L(H))$, und es gilt: $X \subseteq Y$.

Definitions-Proposition 2.28. Sei $X \subseteq L(H)$. Auf der Menge der X -Projektionen wird durch

$$\varphi \preceq \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi \circ \psi = \varphi = \psi \circ \varphi$$

eine Ordnungsrelation definiert.

2.4. INJEKTIVE OPERATORRÄUME

Definition 2.29. Sei $X \subseteq L(H)$.

- (i) Eine Abbildung $p : L(H) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **X -Halbnorm**, falls eine X -Abbildung $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ so existiert, dass gilt: $p(x) = \|\varphi(x)\|$ für alle $x \in L(H)$.
- (ii) Sei $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ eine X -Abbildung. Man nennt die Halbnorm

$$p_\varphi : L(H) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

die zu φ gehörige X -Halbnorm.

Wie man leicht sieht, gilt:

Proposition 2.30. Sei $X \subseteq L(H)$. Auf der Menge der X -Halbnormen wird durch

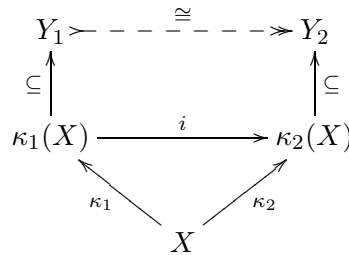
$$p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} p(x) \leq q(x) \text{ für alle } x \in L(H)$$

eine Ordnungsrelation definiert.

Satz 2.31 ([Pau02], Proposition 15.3.). Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum. Dann existiert eine bezüglich „ \leq “ minimale X -Halbnorm auf $L(H)$.

Satz 2.32 ([Pau02], Theorem 15.4; Existenz einer injektiven Hülle). Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum und $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ eine X -Abbildung derart, dass p_φ eine bezüglich „ \leq “ minimale X -Halbnorm ist. Sei $\iota : X \rightarrow \varphi(L(H)), x \mapsto x$. Dann ist φ eine bezüglich „ \preceq “ minimale X -Projektion und $(\varphi(L(H)), \iota)$ eine injektive Hülle von X .

Satz 2.33 ([Pau02], Theorem 15.6; Eindeutigkeit der injektiven Hülle). Sei X ein Operatorraum. Seien $(Y_1, \kappa_1), (Y_2, \kappa_2)$ injektive Hüllen von X . Dann lässt sich die Abbildung $i : \kappa_1(X) \rightarrow \kappa_2(X)$, gegeben durch $i(\kappa_1(x)) = \kappa_2(x)$ für alle $x \in X$, eindeutig zu einer vollständigen Isometrie von Y_1 auf Y_2 fortsetzen.



Notation 2.34. Nach Satz 2.32 besitzt jeder Operatorraum X eine injektive Hülle, die nach Satz 2.33 bis auf vollständige Isometrie eindeutig ist und mit $(I(X), j)$ oder kurz mit $I(X)$ bezeichnet wird.

Mit Hilfe vollständig kontraktiver Projektionen erhält man injektive Operatorräume:

Proposition 2.35 ([ER00], Proposition 4.1.6). *Sei $X \subseteq L(H)$ ein injektiver Operatorraum.*

- (i) *Ist $P : X \rightarrow X$ eine vollständig kontraktive Projektion, dann ist $P(X)$ ein injektiver Operatorraum.*
- (ii) *Umgekehrt gilt: Man findet eine vollständig kontraktive Projektion von $L(H)$ auf X .*

Da $L(H)$ injektiv ist ([BLM04], Theorem 1.2.10, oder Beispiel 2.24), erhält man mit der obigen Proposition:

Beispiel 2.36. *Sei H Hilbertraum. Dann sind H^c und H^r injektive Operatorräume.*

Proposition 2.37 ([BLM04], 4.2.10). *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei X ein Operatorraum. Dann gilt:*

$$M_{m,n}(I(X)) \cong I(M_{m,n}(X)),$$

d. h. $M_{m,n}(I(X))$ ist eine injektive Hülle von $M_{m,n}(X)$.

Definition 2.38. Ein Operatorraum X heißt **unital**, falls er ein ausgezeichnetes Element e_X , genannt Einselement von X , so besitzt, dass eine unitale C^* -Algebra \mathfrak{A} und eine vollständige Isometrie $u : X \rightarrow \mathfrak{A}$ existieren mit $u(e_X) = e_{\mathfrak{A}}$.

Anmerkung 2.39. *Die obige Definition hängt nicht von einer speziellen unitalen C^* -Algebra \mathfrak{A} ab: Sei \mathfrak{B} eine weitere unitale C^* -Algebra, $v : X \rightarrow \mathfrak{B}$ eine vollständige Isometrie mit $v(e_X) = e_{\mathfrak{B}}$. Dann existiert ein eindeutiger vollständiger Ordnungsisomorphismus von dem unitalen Operatorsystem $u(X) + u(X)^*$ auf das unitale Operatorsystem $v(X) + v(X)^*$, der die vollständige Isometrie $v \circ u^{-1} : u(X) \rightarrow v(X)$ fortsetzt.*

2.5. TERNÄRE RINGE VON OPERATOREN

Eine abstrakte Charakterisierung unitaler Operatorräume wird in [BN08], Theorem 1.1, und in [HN08] aufgeführt.

Für die injektive Hülle eines unitalen Operatorraumes gilt:

Proposition 2.40 ([BLM04], Corollary 4.2.8). *Sei X ein unitaler Operatorraum. Dann gibt es eine injektive Hülle $(I(X), j)$ von X so, dass $I(X)$ eine unitale C^* -Algebra ist und j eine unitale Abbildung.*

In der obigen Proposition kann man nicht auf die Voraussetzung verzichten, dass X unital ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2.41 ([ER00], S. 108). *Setze $E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Abbildung*

$$\Phi : M_2 \rightarrow M_2, a \mapsto E_{11}a,$$

ist eine vollständig kontraktive Projektion von M_2 auf den Operatorraum

$$E := E_{11}M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

somit ist E injektiv. Ferner ist E nicht vollständig isometrisch zu einer C^ -Algebra.*

2.5 Ternäre Ringe von Operatoren

Wir wiederholen in diesem Abschnitt Grundlagen der Theorie der ternären Ringe von Operatoren, kurz TROs. Jeder TRO ist ein Hilbert- C^* -Modul, und umgekehrt kann jeder Hilbert- C^* -Modul treu als TRO dargestellt werden. Des weiteren kann man jeden TRO Z nicht-ausgeartet einbetten, d. h. man findet Hilberträume H und K mit $[ZH]$ dicht in K und $[Z^*K]$ dicht in H . Außerdem ist jeder Operatorraum in einem kleinsten TRO enthalten, der sogenannten ternären Hülle.

Definition 2.42. Seien H, K Hilberträume.

- (i) Unter einem **ternären Ring von Operatoren** (kurz **TRO**) versteht man einen abgeschlossenen Untervektorraum Z von $L(H, K)$ (oder einer C^* -Algebra) mit der Eigenschaft: $ZZ^*Z \subseteq Z$. Für alle $x, y, z \in Z$ schreibt man anstelle von xy^*z auch $[x, y, z]$, dieses Produkt wird **Trippelprodukt** auf Z genannt.

- (ii) Ein **Untertripel** eines TRO Z ist ein abgeschlossener Untervektorraum Y von Z , der $YY^*Y \subseteq Y$ erfüllt.
- (iii) Ein **Tripelmorphismus** zwischen TROs Y und Z ist eine lineare Abbildung $T : Y \rightarrow Z$ mit der Eigenschaft: $T([x, y, z]) = [Tx, Ty, Tz]$ für alle $x, y, z \in Y$.

In einem TRO Z gilt bereits $ZZ^*Z = Z$ ([Exe97], Corollary 4.10).

In [NR03] werden TROs mit Hilfe von Operatorräumen und beschränkten symmetrischen Gebieten charakterisiert (siehe Theorem 5.3).

Proposition 2.43 (Vgl. [BLM04], Corollary 4.4.6 und Lemma 8.3.2). *Seien Z_1, Z_2 TROs. Dann ist $\varphi : Z_1 \rightarrow Z_2$ genau dann ein Tripelisomorphismus, wenn φ eine surjektive vollständige Isometrie ist.*

Proposition 2.44 (Vgl. [Zet83], S. 123). *Sei Z ein TRO. Dann sind ZZ^* und Z^*Z C^* -Algebren. Ferner ist Z ein voller Hilbert- C^* -Modul über Z^*Z vermöge $\langle x, y \rangle_{Z^*Z} := x^*y$.*

Umgekehrt kann jeder Hilbert- C^* -Modul treu als TRO dargestellt werden ([Zet83], Theorem 2.6). Alternativ kann man die Linking-Algebra eines Hilbert- C^* -Moduls E bilden. Dann ist E als rechte obere Ecke einer C^* -Algebra ein TRO.

Die Morphismen zwischen TROs sind die Tripelmorphismen. Hingegen sind die Morphismen zwischen Hilbert- C^* -Moduln die adjungierbaren Abbildungen.

Ähnlich wie bei der nicht-ausgearteten Darstellung einer C^* -Algebra kann man auch jeden TRO nicht-ausgeartet einbetten:

Proposition 2.45 (Vgl. [Har81], S. 341). *Sei $Z \subseteq L(H, K)$ ein TRO, $H_1 := \{\xi \in H ; Z \cdot \xi = \{0\}\}$ und $K_1 := \{\eta \in K ; Z^* \cdot \eta = \{0\}\}$.*

- (i) *Es ist $[ZH_1^\perp]$ dicht in K_1^\perp und $[Z^*K_1^\perp]$ dicht in H_1^\perp .*
- (ii) *Es ist $W := \{z|_{H_1^\perp} ; z \in Z\} \subseteq L(H_1^\perp, K_1^\perp)$ ein TRO mit $[WH_1^\perp]$ dicht in K_1^\perp und $[W^*K_1^\perp]$ dicht in H_1^\perp .*
- (iii) *$\varphi : Z \rightarrowtail W, z \mapsto z|_{H_1^\perp}$, ist ein ternärer Isomorphismus auf W .*

Proposition 2.46 ([BLM04], 4.4.5.(1)). *Sei X ein TRO. Dann ist die Einbettung $j : X \rightarrow I(X)$ ein Tripelmorphismus.*

2.5. TERNÄRE RINGE VON OPERATOREN

Definition 2.47. (i) Ein **Tripelsystem** ist ein Operatorraum Y , der eine Abbildung $[\cdot, \cdot, \cdot] : Y \times Y \times Y \rightarrow Y$, genannt **Tripelprodukt**, derart besitzt, dass ein TRO Z und eine vollständige Isometrie $\Phi : Y \rightarrow Z$ existieren mit der Eigenschaft, dass Φ ein **Tripelmorphismus** ist, d. h. linear ist und folgendes erfüllt:

$$\Phi([x, y, z]) = [\Phi(x), \Phi(y), \Phi(z)]$$

für alle $x, y, z \in Y$.

(ii) Unter einem **Untertripel** eines Tripelsystems Z versteht man einen abgeschlossenen Unterraum von Z , der unter dem Tripelprodukt abgeschlossen ist.

Insbesondere sind TROs Tripelsysteme. Ferner ist ein Untertripel eines Tripelsystems wieder ein Tripelsystem.

Proposition 2.48 (Vgl. [Ham99], Proposition 2.1.(iii)). *Sei Y ein Tripelsystem, Z ein TRO und $\Phi : Y \rightarrow Z$ ein Tripelmorphismus. Dann ist $\Phi(Y)$ ein TRO.*

Mit der obigen Proposition und Proposition 2.43 folgt, dass es auf einem Operatorraum Y höchstens ein Tripelprodukt derart geben kann, dass Y ein Tripelsystem ist.

Definition 2.49. Sei X ein Operatorraum. Eine **Tripelerweiterung** von X ist ein Paar, bestehend aus einem Tripelsystem Y und einer vollständigen Isometrie $\kappa : X \rightarrow Y$ derart, dass Y das kleinste Untertripel von Y ist, welches $\kappa(X)$ enthält.

Definitions-Satz 2.50 (Vgl. [BLM04], 8.3.9). Sei X ein Operatorraum.

(i) Es existiert eine Tripelerweiterung (Y, κ) von X mit der folgenden universellen Eigenschaft: Für jede Tripelerweiterung (Z, ρ) von X existiert ein (notwendig eindeutiger und surjektiver) Tripelmorphismus $\Phi : Z \rightarrow Y$ derart, dass $\Phi \circ \rho = \kappa$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} Z & \overset{\Phi}{\dashrightarrow} & Y \\ & \swarrow \rho \quad \searrow \kappa & \\ & X & \end{array}$$

- (ii) Eine Tripelerweiterung (Y, κ) wie oben ist bis auf Tripelisomorphismen eindeutig, heißt **ternäre Hülle** von X und wird mit $(\mathcal{T}(X), j)$ bezeichnet.

Man kann die ternäre Hülle wie folgt beschreiben:

Proposition 2.51 (Vgl. [BLM04], 8.3.8). *Sei X ein Operatorraum. Dann gilt:*

$$\mathcal{T}(X) \cong \overline{\text{lin}} \left\{ x_1 \cdot x_2^* \cdot x_3 \cdot x_4^* \cdots x_{2n+1}; n \in \mathbb{N}_0, x \in j(X)^{2n+1} \right\} \subseteq I(X), \quad (2.5.1)$$

wobei $j : X \rightarrow I(X)$ wie in Notation 2.34 sei. Insbesondere folgt:

$$I(\mathcal{T}(X)) \cong I(X). \quad (2.5.2)$$

Wir betrachten $j : X \rightarrow \mathcal{T}(X)$ wie in Definitions-Satz 2.50 und $j : X \rightarrow I(X)$ wie in Notation 2.34. Wegen der obigen Proposition ist es gerechtfertigt, für beide Abbildungen dieselbe Bezeichnung zu benutzen.

Die ternäre Hülle besitzt die folgenden Eigenschaften:

Proposition 2.52 (Vgl. [BLM04], 4.4.7). *(i) Sei X ein TRO. Dann gilt:*
 $\mathcal{T}(X) \cong X$.

(ii) Sei X ein unitaler Operatorraum. Dann ist $\mathcal{T}(X)$ eine unitale C^ -Algebra, die $j(X)$ als unitalen Untervektorraum enthält. Ferner ist $\mathcal{T}(X)$ isomorph zu der von $j(X)$ erzeugten C^* -Unteralgebra in $I(X)$.*

2.6 Selbstadjungierte Operatorräume

In diesem Abschnitt notieren wir die Definition eines selbstadjungierten Operatorraumes. Außerdem erinnern wir an $*$ -TROs und an die ternäre $*$ -Hülle.

Definition 2.53. Seien V, W Vektorräume mit Involution. Eine Abbildung $\alpha : V \rightarrow W$ heißt **$*$ -linear**, falls α linear ist und $\alpha(v^*) = \alpha(v)^*$ für alle $v \in V$ gilt.

Definition 2.54. Unter einem **selbstadjungierter Operatorraum** (kurz **s. a. Operatorraum**) versteht man einen Operatorraum X , versehen mit einer Involution $\cdot^* : X \rightarrow X$ derart, dass eine $*$ -lineare, vollständige Isometrie $i : X \rightarrow L(H)$ existiert.

2.6. SELBSTADJUNGIERTE OPERATORRÄUME

Proposition 2.55 ([BKNW07], S. 2). *Sei X ein Operatorraum. Dann ist X genau dann ein selbstadjungierter Operatorraum, falls eine Involution $\cdot^* : X \rightarrow X$ derart existiert, dass gilt:*

$$\|(x_{ji}^*)_{i,j}\|_n = \|x\|_n \quad (2.6.1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in M_n(X)$.

Definition 2.56. (i) Einen selbstadjungierten TRO bezeichnet man auch als ***-TRO**.

(ii) Ein ***-Untertripel** eines *-TRO Z ist ein abgeschlossener, selbstadjungierter Unterraum Y von Z , der $YY^*Y \subseteq Y$ erfüllt.

(iii) Ein **ternärer *-Morphismus** zwischen *-TROs ist ein *-linearer Tripelmorphismus.

Definition 2.57. Sei X ein selbstadjungierter Operatorraum.

(i) Eine **ternäre *-Erweiterung** von X ist ein Paar (Z, κ) , bestehend aus einem *-TRO Z und einer *-linearen, vollständigen Isometrie $\kappa : X \rightarrow Z$ derart, dass es keine nicht-trivialen *-Untertripel von Z gibt, die $\kappa(X)$ enthalten.

(ii) Eine **ternäre *-Hülle** von X ist eine beliebige ternäre *-Erweiterung (Y, j) von X mit der universellen Eigenschaft des folgenden Satzes.

Satz 2.58 ([BW06], S. 3). *Es sei X ein selbstadjungierter Operatorraum. Dann existiert eine ternäre *-Erweiterung (Y, j) von X mit der folgenden universellen Eigenschaft: Für jede ternäre *-Erweiterung (Z, κ) von X existiert ein (notwendigerweise eindeutiger und surjektiver) ternärer *-Morphismus $\Phi : Z \rightarrow Y$ derart, dass $\Phi \circ \kappa = j$ gilt.*

$$\begin{array}{ccc} Z & \overset{\Phi}{\dashrightarrow} & Y \\ & \swarrow \kappa \quad \searrow j & \\ & X & \end{array}$$

Notation 2.59. Sei X ein s. a. Operatorraum. Dann wird mit $(\mathcal{T}^*(X), j)$ die (bis auf ternäre *-Isomorphismen) eindeutige ternäre *-Hülle von X bezeichnet.

Proposition 2.60 ([BKNW07], nach Theorem 2.1). *Sei X ein s. a. Operatorraum. Dann ist die ternäre *-Hülle von X isomorph zu der ternären Hülle des Operatorraumes X , kurz: $\mathcal{T}^*(X) \cong \mathcal{T}(X)$.*

2.7 Die injektive Hülle eines s. a. Operatorraumes

In diesem Abschnitt wird zunächst die Existenz einer injektiven $*$ -Hülle eines selbstadjungierten Operatorraumes X gezeigt. Unser Vorgehen lehnt sich dem in [Pau02], Kapitel 15, an, in dem die Existenz einer injektiven Hülle eines Operatorraumes gezeigt wird. Anschließend wird bewiesen, dass die injektive Hülle eindeutig ist.

Zunächst definieren wir die Begriffe injektiver selbstadjungierter Operatorraum und injektive $*$ -Hülle.

Definition 2.61. Ein s. a. Operatorraum Z heißt **injektiv**, falls für jeden s. a. Operatorraum X und jede $*$ -lineare, vollständig kontraktive Abbildung $\varphi : X \rightarrow Z$ und für jeden s. a. Operatorraum Y , der X als abgeschlossenen Unterraum enthält, eine $*$ -lineare, vollständig kontraktive Fortsetzung $\Phi : Y \rightarrow Z$ von φ existiert.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \subseteq \uparrow & \searrow \Phi & \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Z \end{array}$$

Definition 2.62. Sei X ein s. a. Operatorraum. Eine **$*$ -Erweiterung** von X ist ein Paar, bestehend aus einem s. a. Operatorraum Y und einer $*$ -linearen, vollständigen Isometrie $\kappa : X \rightarrow Y$.

Definition 2.63. Sei X ein s. a. Operatorraum. Dann heißt (Y, κ) **injektive $*$ -Hülle** von X , falls (Y, κ) eine $*$ -Erweiterung von X ist, Y injektiv ist und es keinen echten injektiven selbstadjungierten Unterraum von Y gibt, der $\kappa(X)$ enthält.

Wir sprechen hier von einer injektiven $*$ -Hülle, um diese besser von der injektiven Hülle eines Operatorraumes unterscheiden zu können.

Im folgenden wird die Existenz einer injektiven $*$ -Hülle für einen beliebigen s. a. Operatorraum X gezeigt. Hierfür werden zunächst die Begriffe $*$ - X -Abbildung, $*$ - X -Projektion und $*$ - X -Halbnorm entsprechend den Begriffen Y -Abbildung, Y -Projektion und Y -Halbnorm für einen beliebigen Operatorraum Y eingeführt.

Definition 2.64. Sei $X \subseteq L(H)$ ein s. a. Operatorraum.

- (i) Eine Abbildung $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ heißt **$*$ - X -Abbildung**, falls φ eine vollständig kontraktive, $*$ -lineare Abbildung mit $\varphi|_X = \text{id}_X$ ist.

2.7. DIE INJEKTIVE HÜLLE EINES S. A. OPERATORRAUMES

- (ii) Unter einer ***-X-Projektion** versteht man eine *-X-Abbildung φ , für die $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

Wie man leicht sieht, gilt:

Definitions-Proposition 2.65. Sei $X \subseteq L(H)$ ein s. a. Operatorraum. Auf der Menge der *-X-Projektionen wird durch

$$\varphi \preceq \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi \circ \psi = \varphi = \psi \circ \varphi$$

eine Ordnungsrelation definiert.

Definition 2.66. Sei $X \subseteq L(H)$ ein s. a. Operatorraum.

- (i) Eine Abbildung $p : L(H) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ***-X-Halbnorm**, falls eine *-X-Abbildung $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ so existiert, dass gilt: $p(x) = \|\varphi(x)\|$ für alle $x \in L(H)$.
- (ii) Sei $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ eine *-X-Abbildung. Man nennt die Halbnorm

$$p_\varphi : L(H) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

die zu φ gehörige *-X-Halbnorm.

Definitions-Proposition 2.67. Sei $X \subseteq L(H)$ ein s. a. Operatorraum. Auf der Menge der *-X-Halbnormen wird durch

$$p \leq q \stackrel{\text{def}}{\iff} p(x) \leq q(x) \text{ für alle } x \in L(H)$$

eine Ordnungsrelation definiert.

Definition 2.68. Seien X, Y s. a. Operatorräume, sei $\varphi : X \rightarrow Y$. Definiere

$$\varphi^* : X \rightarrow Y, x \mapsto (\varphi(x^*))^*.$$

Lemma 2.69. Seien X, Y s. a. Operatorräume, sei $\varphi : X \rightarrow Y$ linear. Dann gilt: $\|\varphi^*\| = \|\varphi\|$.

Beweis. Für alle $x \in X$ erhält man wegen $\|x^*\| = \|x\|$ (siehe (2.6.1)):

$$\|\varphi^*(x)\| = \|\varphi(x^*)^*\| = \|\varphi(x^*)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x^*\| = \|\varphi\| \cdot \|x\|.$$

Es folgt: $\|\varphi^*\| \leq \|\varphi\|$. Wegen $\|\varphi\| = \|(\varphi^*)^*\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|\varphi\|$ folgt die Behauptung. \square

Proposition 2.70. *Sei H ein Hilbertraum. Dann ist $L(H)$ injektiv als s. a. Operatorraum.*

Beweis. Seien X, Y s. a. Operatorräume mit $X \subseteq Y$. Sei $\varphi : X \rightarrow L(H)$ vollständig kontraktiv und $*$ -linear. Da $L(H)$ ein injektiver Operatorraum ist ([BLM04], Theorem 1.2.10, oder Beispiel 2.24), findet man eine vollständig kontraktive Abbildung $\Phi : Y \rightarrow L(H)$ mit $\Phi|_X = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Phi} & L(H) \\ \uparrow \subseteq & \nearrow \varphi & \\ X & & \end{array}$$

Setze $\Psi := \frac{\Phi + \Phi^*}{2}$. Dann ist Ψ $*$ -linear und eine Fortsetzung von φ . Mit Lemma 2.69 erhält man, dass Φ^* vollständig kontraktiv ist. Hiermit folgt: $\|\Psi\|_{cb} \leq \frac{1}{2}(\|\Phi\|_{cb} + \|\Phi^*\|_{cb}) \leq 1$. \square

Analog zu Proposition 2.35 im Operatorraum gilt in s. a. Operatorräumen:

Proposition 2.71. *Sei X ein injektiver s. a. Operatorraum und $P : X \rightarrow X$ eine $*$ -lineare, vollständig kontraktive Projektion. Dann ist $P(X)$ ein injektiver s. a. Operatorraum.*

Beweis. Für alle $x \in X$ gilt $P(x)^* = P(x^*) \in P(X)$, also ist $\cdot^*|_{P(X)}$ eine Involution auf $P(X)$.

Seien $Y \subseteq Z \subseteq L(K)$ s. a. Operatorräume, sei $\varphi : Y \rightarrow P(X)$ vollständig kontraktiv und $*$ -linear. Dann ist auch $\varphi : Y \rightarrow X$ vollständig kontraktiv und $*$ -linear. Da X injektiv ist, findet man eine $*$ -lineare, vollständig kontraktive Fortsetzung $\Phi : Z \rightarrow X$ von φ . Somit ist $\Psi := P \circ \Phi : Z \rightarrow P(X)$ die gesuchte $*$ -lineare, vollständig kontraktive Fortsetzung von φ .

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Phi} & X \\ \uparrow \subseteq & & \downarrow P \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & P(X) \end{array}$$

\square

Satz 2.72. *Sei $X \subseteq L(H)$ ein s. a. Operatorraum. Dann existiert eine bezüglich „ \leq “ minimale $*$ - X -Halbnorm auf $L(H)$.*

Beweis. Dies beweist man analog zum Beweis für Operatorräume, siehe z. B. [Pau02], Beweis von Proposition 15.3. Wir skizzieren kurz den dortigen Beweis, angepasst an unsere Situation: Sei $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine absteigende Kette von

2.7. DIE INJEKTIVE HÜLLE EINES S. A. OPERATORRAUMES

$*$ - X -Halbnormen, wobei $\varphi_\lambda : L(H) \rightarrow L(H)$ eine $*$ - X -Abbildung für alle $\lambda \in \Lambda$ sei. Dann besitzt $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Teilnetz $(\varphi_{\lambda_\mu})_\mu$, welches gegen die X -Abbildung φ konvergiert. Man erhält: $p_\varphi \leq p_{\varphi_\lambda}$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Es bleibt zu zeigen, dass φ $*$ -linear ist. Sei $x \in X$. Man hat für alle $h, k \in H$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x^*)h, k \rangle &= \lim_\mu \langle \varphi_{\lambda_\mu}(x^*)h, k \rangle = \lim_\mu \langle h, \varphi_{\lambda_\mu}(x)k \rangle = \lim_\mu \overline{\langle \varphi_{\lambda_\mu}(x)k, h \rangle} \\ &= \overline{\lim_\mu \langle \varphi_{\lambda_\mu}(x)k, h \rangle} = \overline{\langle \varphi(x)k, h \rangle} = \langle h, \varphi(x)k \rangle = \langle \varphi(x)^*h, k \rangle. \end{aligned}$$

Es folgt: $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$. \square

Unter Verwendung von Satz 2.72, Proposition 2.70 und Proposition 2.71 beweist man analog zu [Pau02], Theorem 15.4, den folgenden Satz:

Satz 2.73 (Existenz einer injektiven $*$ -Hülle). *Sei $X \subseteq L(H)$ ein s. a. Operatorraum und $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ eine $*$ - X -Abbildung derart, dass p_φ eine minimale $*$ - X -Halbnorm ist. Sei $\iota : X \rightarrow \varphi(L(H)), x \mapsto x$. Dann ist φ eine minimale $*$ - X -Projektion und $(\varphi(L(H)), \iota)$ eine injektive $*$ -Hülle von X , die ein $*$ -TRO ist.*

Analog zu [Pau02], Lemma 15.5, zeigt man für s. a. Operatorräume mit Hilfe von Satz 2.73:

Lemma 2.74. *Sei $X \subseteq L(H)$ ein s. a. Operatorraum. Sei $\varphi : L(H) \rightarrow L(H)$ eine $*$ - X -Abbildung derart, dass p_φ eine minimale $*$ - X -Halbnorm ist. Falls $\gamma : \varphi(L(H)) \rightarrow \varphi(L(H))$ vollständig kontraktiv und $*$ -linear ist mit $\gamma|_X = \text{id}_X$, dann gilt: $\gamma(\varphi(x)) = \varphi(x)$ für alle $x \in X$.*

Mit diesem Lemma beweist man, analog zu [Pau02], Theorem 15.6, den folgenden

Satz 2.75 (Eindeutigkeit der injektiven $*$ -Hülle). *Sei X ein s. a. Operatorraum. Seien $(Y_1, \kappa_1), (Y_2, \kappa_2)$ injektive $*$ -Hüllen von X . Dann lässt sich die Abbildung $i : \kappa_1(X) \rightarrow \kappa_2(X)$, gegeben durch $i(\kappa_1(x)) = \kappa_2(x)$ für alle $x \in X$, eindeutig zu einer $*$ -linearen, surjektiven vollständigen Isometrie von Y_1 auf Y_2 fortsetzen.*

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & Y_2 \\ \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\ \kappa_1(X) & \xrightarrow{\quad i \quad} & \kappa_2(X) \\ & \nwarrow \kappa_1 \quad \nearrow \kappa_2 & \\ & X & \end{array}$$

Mit Lemma 2.74 und Satz 2.75 beweist man:

Folgerung 2.76 (Rigidität). *Sei X ein s. a. Operatorraum. Sei (Y, κ) eine injektive $*$ -Hülle von X und $\psi : Y \rightarrow Y$ vollständig kontraktiv und $*$ -linear mit $\psi(\kappa(x)) = \kappa(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt: $\psi = \text{id}_Y$.*

Kapitel 3

Unbeschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen

Dieses Kapitel ist der zentrale Teil dieser Arbeit. Hier werden drei verschiedene Begriffe von unbeschränkten Multiplikatoren auf einem Operatorraum untersucht.

Da ein Operatorraum weniger Struktur als ein Hilbert- C^* -Modul besitzt, ist nicht ohne weiteres ersichtlich, wie man die Definition eines regulären Operators auf Operatorräume übertragen kann. Bekanntlich ist die Menge $\mathbb{B}(E)$ der adjungierbaren Abbildungen auf E isomorph zu der Menge $\mathcal{A}_l(E)$ der von links adjungierbaren Multiplikatoren auf E , wobei E als Operatorraum aufgefasst wird. Da außerdem schiefadjungierte reguläre Operatoren mit Hilfe von C_0 -Gruppen charakterisiert werden (siehe Satz 1.29 (Satz von Stone) und Satz 1.30), wird hierdurch die Definition eines unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikators auf einem Operatorraum X motiviert:

Definition 3.1. (i) Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ heißt **unbeschränkter schiefadjungierter Multiplikator** auf X , falls A Erzeuger einer C_0 -Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X mit $U_t \in \mathcal{A}_l(X)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.

(ii) Die Menge aller unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikatoren auf X wird mit $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ bezeichnet.

Im ersten Abschnitt des Kapitels wird bewiesen, dass die Menge der schiefadjungierten Elemente von $\mathcal{A}_l(X)$ in $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ enthalten ist und dass in unitalen Operatorräumen die umgekehrte Inklusion wahr ist. Außerdem wird

der Begriff des C_0 -Linksmultiplikators eingeführt, eines Operators, der eine C_0 -Halbgruppe von Elementen aus $\mathcal{M}_l(X)$, der Menge der Linksmultiplikatoren auf X , erzeugt. Wiederum gilt, dass $\mathcal{M}_l(X)$ in der Menge der C_0 -Linksmultiplikatoren enthalten ist und dass in unitalen Operatorräumen Gleichheit gilt.

Im darauffolgenden Unterabschnitt werden Beispiele für C_0 -Linksmultiplikatoren und für unbeschränkte schiefadjungierte Multiplikatoren festgehalten. Insbesondere wird gezeigt, dass in einem Hilbert- C^* -Modul die schiefadjungierten regulären Operatoren mit den unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikatoren übereinstimmen.

Um den Begriff eines beliebigen unbeschränkten Multiplikators einzuführen, wird benutzt, dass für jeden regulären Operator T auf E durch $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ ein schiefadjungierter regulärer Operator auf $E \oplus E$ gegeben ist. Dies führt zu der folgenden Definition im zweiten Abschnitt des Kapitels:

- Definition 3.2.** (i) Eine Abbildung $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$ heißt **unbeschränkter Multiplikator** auf X , falls ein $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ existiert mit der Eigenschaft: $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$, wobei mit $C_2(X)$ der Spaltenoperatorraum bezeichnet wird.
- (ii) Mit $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ wird die Menge der unbeschränkten Multiplikatoren auf X bezeichnet.

Ein zentrales Resultat ist, dass $\mathcal{A}_l^{C_0}(E)$ mit der Menge der regulären Operatoren auf E übereinstimmt. Da ferner S aus der obigen Definition gleich T^* ist, sind die unbeschränkten Multiplikatoren eine Verallgemeinerung der regulären Operatoren auf Operatorräume. Weiterhin gilt: $\mathcal{A}_l(X) \subseteq \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.

Im dritten Abschnitt wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen die Operatoren A und $\eta_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ auf X (bzw. $C_2(X)$) eine C_0 -Halbgruppe erzeugen und welche Zusammenhänge zwischen diesen beiden Operatoren bestehen. Mit Hilfe von η_A erhält man intrinsische Charakterisierungen der drei Begriffe von unbeschränkten Multiplikatoren. Beispielsweise ist A genau dann ein unbeschränkter schiefadjungierter Multiplikator, wenn η_A eine vollständig kontraktive C_0 -Gruppe auf $C_2(X)$ erzeugt, d. h. eine C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$, für die gilt: T_t ist vollständig kontraktiv für alle $t \in \mathbb{R}$.

3.1. C_0 -LINKSMULTIPLIKATOREN UND UNBESCHRÄNKTE SCHIEFADJUNGIERTE MULTIPLIKATOREN

Daher ist von Interesse, wann ein Operator eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe (bzw. C_0 -Gruppe) erzeugt. Charakterisierungen hierzu werden im nächsten Abschnitt bewiesen, in dem die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips auf Operatorräume übertragen werden. Hiermit ergeben sich weitere Charakterisierungen für die drei Begriffe von unbeschränkten Multiplikatoren.

Im fünften Abschnitt wird gezeigt, dass man jeden C_0 -Linksmultiplikator auf X als Einschränkung eines C_0 -Linksmultiplikators auf der ternären Hülle $\mathcal{T}(X)$ von X auffassen kann. Entsprechende Aussagen werden auch für die unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikatoren und die unbeschränkten Multiplikatoren bewiesen. Hiermit folgt, dass der Operator S aus Definition 3.2 eindeutig ist und somit als Adjungierte von T angesehen werden kann.

Im anschließenden Abschnitt wird festgehalten, wie man C_0 -Linksmultiplikatoren (bzw. unbeschränkte schiefadjungierte Multiplikatoren) und die hiervon erzeugten C_0 -Halbgruppen (bzw. C_0 -Gruppen) von X auf einen Hilbertraum H überführen kann. Hiermit erhält man eine weitere Charakterisierung der Elemente von $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ und $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.

Im siebten Abschnitt wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen man eine C_0 -Halbgruppe von einem Hilbertraum H auf einen Operatorraum $X \subseteq L(H)$ überführen kann. Hierfür wird die sogenannte strikte X -Topologie eingeführt und untersucht.

Im letzten Abschnitt des Kapitels wird ein Störungsergebnis von S. Dama-ville ([Dam04]) für reguläre Operatoren auf unbeschränkte Multiplikatoren verallgemeinert. Außerdem werden einige Resultate aus der Störungstheorie für Erzeuger von C_0 -Halbgruppen auf Operatorräumen formuliert und auf unbeschränkte Multiplikatoren angewendet.

3.1 C_0 -Linksmultiplikatoren und unbeschränkte schiefadjungierte Multiplikatoren

Wir führen in diesem Abschnitt zwei Arten von unbeschränkten Multiplikatoren auf Operatorräumen ein, nämlich die C_0 -Linksmultiplikatoren (als Menge: $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$) und die unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikatoren (als Menge: $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$). Letztere sind Erzeuger einer C_0 -Gruppe von

unitären Elementen aus $\mathcal{A}_l(X)$. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ alle schiefadjungierten Elemente von $\mathcal{A}_l(X)$ enthält und dass in unitalen Operatorräumen Gleichheit gilt. Des weiteren formulieren wir entsprechende Aussagen für $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$. Ferner beleuchten wir den Zusammenhang zu den regulären Operatoren.

Wir erinnern kurz an einige Definitionen aus dem Anhang:

Erinnerung 3.3. *Sei X ein Operatorraum (siehe Definition 2.3). Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_l(X)$ die Menge der Linksmultiplikatoren auf X (siehe Definition A.1) und mit $\mathcal{A}_l(X)$ die Menge der von links adjungierbaren Multiplikatoren auf X (siehe Definition A.11).*

Es ist

$$\mathcal{S}(X) := \begin{pmatrix} \mathbb{C} \text{id}_H & X \\ X^* & \mathbb{C} \text{id}_H \end{pmatrix}$$

ein unitales Operatorsystem, welches Paulsen-System von X genannt wird (siehe Definitions-Proposition 2.22). Für die Ecke (k, ℓ) der injektiven Hülle $I(\mathcal{S}(X))$ von $\mathcal{S}(X)$ verwenden wir die Schreibweise $I_{k\ell}(X)$ für alle $k, \ell \in \underline{2}$ (siehe Proposition A.4). Es gilt somit:

$$I(\mathcal{S}(X)) \cong \begin{pmatrix} I_{11}(X) & I_{12}(X) \\ I_{21}(X) & I_{22}(X) \end{pmatrix}.$$

Mit j sei die kanonische Abbildung von X nach $I_{12}(X)$ bezeichnet.

Es ist

$$\mathcal{IM}_\ell(X) := \{a \in I_{11}(X); a \cdot j(X) \subseteq j(X)\}$$

eine unitale Banachalgebra und

$$\mathcal{IM}_\ell^*(X) := \mathcal{IM}_\ell(X) \cap \mathcal{IM}_\ell(X)^* \subseteq I(\mathcal{S}(X))$$

eine unitale C^ -Algebra. Für alle $a \in \mathcal{IM}_\ell(X)$ wird durch*

$$\tilde{L}_a : X \rightarrow X, x \mapsto j^{-1}(a \cdot j(x)),$$

ein Linksmultiplikator definiert. Dann ist

$$\Theta : \mathcal{IM}_\ell(X) \rightarrow \mathcal{M}_l(X), a \mapsto \tilde{L}_a,$$

ein unitaler, isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{IM}_\ell(X)$ auf die Banachalgebra $(\mathcal{M}_l(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}_l(X)})$ (siehe Satz A.9) und $\Theta|_{\mathcal{IM}_\ell^(X)} : \mathcal{IM}_\ell^*(X) \rightarrow \mathcal{A}_l(X)$ ein unitaler $*$ -Isomorphismus auf $\mathcal{A}_l(X)$ (Proposition A.13).*

3.1. C_0 -LINKSMULTIPLIKATOREN UND UNBESCHRÄNKTE SCHIEFADJUNGIERTE MULTIPLIKATOREN

Definition 3.4. Sei X ein Operatorraum.

- (i) Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ heißt **C_0 -Linksmultiplikator** auf X , falls A Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X mit $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.
- (ii) Die Menge aller C_0 -Linksmultiplikatoren auf X wird mit $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ bezeichnet.
- (iii) Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ heißt **unbeschränkter schiefadjungierter Multiplikator** auf X , falls A Erzeuger einer C_0 -Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X mit $U_t \in \mathcal{A}_l(X)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.
- (iv) Die Menge aller unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikatoren auf X wird mit $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ bezeichnet.

Analog zu Beispiel 1.10.(i) gilt:

Proposition 3.5. Sei X ein Operatorraum. Es gilt:

- (i) $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X) \subseteq \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$.
- (ii) $\mathcal{M}_l(X) = \{A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X); D(A) = X\}$.
- (iii) $\{A \in \mathcal{A}_l(X); A \text{ schiefadjungiert}\} = \{A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X); D(A) = X\}$.

Beweis. (i) folgt unmittelbar.

(ii): „ \subseteq “: Sei $A \in \mathcal{M}_l(X)$. Da $\mathcal{M}_l(X)$ eine unitale Banachalgebra ist ([Zar01], Theorem 1.6.2, oder Satz A.9), wird durch $T_t := e^{tA} \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine normstetige Halbgruppe auf X mit Erzeuger A definiert.

„ \supseteq “: Sei $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ mit $D(A) = X$. Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe. Nach [Wer07], Satz VII.4.9, gilt: $T_t = e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Mit [EN00], Proposition I.3.5, erhält man: $A = (t \mapsto T_t)'(0)$. Also folgt: $A \in \mathcal{M}_l(X)$.

(iii): „ \subseteq “: Weil $\mathcal{A}_l(X)$ eine unitale C^* -Algebra ist ([Zar01], Proposition 1.7.4, oder Proposition A.13), folgt dies analog zu (ii).

„ \supseteq “: Sei $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ mit $D(A) = X$. Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die von A erzeugte C_0 -Gruppe. Analog zu (ii) erhält man: $A \in \mathcal{A}_l(X)$. Da $T_t = e^{tA}$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, folgt mit [Upm85], Lemma 8.12: $A^* = -A$. \square

Das folgende Lemma benötigen wir für den Beweis von Proposition 3.8:

Lemma 3.6. *Sei X ein Operatorraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X mit $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t) \in \mathcal{IM}_\ell(X)$, also hat man $j(T_t x) = a_t \cdot j(x)$ für alle $x \in X$. Es gilt:*

- (i) $a_0 = e_{I_{11}(X)}$, wobei mit $e_{I_{11}(X)}$ das Einselement von $I_{11}(X)$ notiert wird.
- (ii) $a_{s+t} = a_s \cdot a_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} a_t \cdot y = y$ für alle $y \in \overline{\text{alg}(j(X))}$, wobei $\text{alg}(j(X))$ die von $j(X)$ in $I(\mathcal{S}(X))$ erzeugte Unteralgebra bezeichnet.
- (iv) Definiere $R_t : j(X) \rightarrow j(X), z \mapsto a_t \cdot z$, für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $(R_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $j(X)$.

Beweis. (i): Für alle $x \in X$ gilt nach (A.1.1) die Gleichung $e_{I_{11}(X)} \cdot j(x) = j(x)$, also ergibt sich: $0 = j(T_0 x) - j(x) = (a_0 - e_{I_{11}(X)}) \cdot j(x)$. Mit [BLM04], Proposition 4.4.12, oder Proposition A.7 folgt: $a_0 = e_{I_{11}(X)}$.

(ii) erhält man analog zu (i).

(iii): Für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\lim_{t \downarrow 0} a_t \cdot j(x) \cdot j(y) = j \left(\lim_{t \downarrow 0} T_t x \right) \cdot j(y) = j(x)j(y).$$

Wenn man dies analog auf Elemente aus $\text{alg}(j(X))$ anwendet, erhält man: $\lim_{t \rightarrow 0} a_t \cdot y = y$ für alle $y \in \text{alg}(j(X))$. Indem man die Stetigkeit von j benutzt, folgt (iii).

(iv) folgt mit (i), (ii) und (iii). □

Eine entsprechende Fassung von Lemma 3.6 für C_0 -Gruppen lautet:

Lemma 3.7. *Sei X ein Operatorraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf X mit $T_t \in \mathcal{A}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t) \in \mathcal{IM}_\ell^*(X)$. Es gilt:*

- (i) $a_0 = e_{I_{11}(X)}$.
- (ii) $a_{s+t} = a_s \cdot a_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} a_t \cdot y = y$ für alle $y \in \overline{\text{alg}(j(X))}$.
- (iv) Definiere $R_t : j(X) \rightarrow j(X), z \mapsto a_t \cdot z$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $(R_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf $j(X)$.
- (v) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: Ist T_t unitär, so auch a_t .

3.1. C_0 -LINKSMULTIPLIKATOREN UND UNBESCHRÄNKTE SCHIEFADJUNGIERTE MULTIPLIKATOREN

Beweis. (i)–(iv) erhält man analog zum Beweis von Lemma 3.6.

(v) folgt mit [BLM04], Proposition 4.4.12, oder Proposition A.7. \square

Es sei daran erinnert, dass ein Operatorraum X unital heißt, falls es eine unitale vollständige Isometrie von X in eine unitale C^* -Algebra gibt.

In einer unitalen C^* -Algebra \mathfrak{A} gilt: $\mathcal{R}(\mathfrak{A}) \cong \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ (vgl. [Lan95], S. 117, oder Beispiel 1.10). Nach der folgenden Proposition gilt ein entsprechendes Resultat in unitalen Operatorräumen. Somit erhält man insbesondere eine notwendige Bedingung dafür, dass ein Operatorraum unital ist.

Proposition 3.8. *Sei X ein unitaler Operatorraum. Dann gilt:*

$$(i) \quad \mathcal{M}_l(X) = \mathcal{M}_l^{C_0}(X).$$

$$(ii) \quad \{A \in \mathcal{A}_l(X); A \text{ schiefadjungiert}\} = \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X).$$

Beweis. (i): „ \subseteq “ folgt mit Proposition 3.5.

„ \supseteq “: Mit e_X sei das Einselement von X bezeichnet. Da die Definition eines unitalen Operatorraumes unabhängig von der Einbettung in eine spezielle C^* -Algebra ist (Anmerkung 2.39), findet man o.B.d.A. einen Hilbertraum H mit $X \subseteq L(H)$ und $e_X = \text{id}_H$. Sei $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$. Dann ist A Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X mit $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein $a_t \in \mathcal{IM}_\ell(X)$ mit $j(T_t x) = a_t \cdot j(x)$. Da nach Proposition A.4 gilt $I_{11}(X) \subseteq M_2(L(H))$, findet man für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein $\tilde{a}_t \in L(H)$ mit $a_t = \begin{pmatrix} \tilde{a}_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da X unital ist, gilt nach [Ble01], S. 20, für alle $S \in \mathcal{M}_l(X)$: $\|S\|_{\text{cb}} = \|S\|_{\mathcal{M}_l(X)}$. Außerdem gilt: $e_{I(X)} = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_H \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da $j : X \rightarrow I(X)$ unital ([BLM04], Corollary 4.2.8, oder Proposition 2.40) und Θ^{-1} nach Satz A.9 eine unitale Isometrie ist, erhält man:

$$\begin{aligned} \|T_t - \text{id}_X\| &\leq \|T_t - \text{id}_X\|_{\text{cb}} = \|T_t - \text{id}_X\|_{\mathcal{M}_l(X)} \\ &= \|\Theta^{-1}(T_t - \text{id}_X)\| = \|a_t - e_{I_{11}(X)}\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \tilde{a}_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{id}_H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \|\tilde{a}_t - \text{id}_H\| \\ &= \|a_t \cdot e_{I(X)} - e_{I(X)}\| = \|a_t \cdot j(e_X) - j(e_X)\| \\ &= \|T_t(e_X) - e_X\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Somit ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine normstetige Halbgruppe. Nach [Wer07], Satz VII.4.9, ist $A \in L(X)$ und $T_t = e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Mit [EN00], Proposition I.3.5, erhält man $A = (t \mapsto T_t)'(0)$, also folgt: $A \in \mathcal{M}_l(X)$.

(ii): „ \subseteq “ folgt mit Proposition 3.5.

„ \supseteq “: Sei $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$. Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweisteil (i). Analog zu (i) folgt: $A \in \mathcal{A}_l(X)$. Nach [Wer07], Satz VII.4.9, gilt: $T_t = e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da T_t für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist, folgt mit [Upm85], Lemma 8.12: $A^* = -A$. \square

3.1.(a) Beispiele

In diesem Abschnitt führen wir Beispiele für C_0 -Linksmultiplikatoren und unbeschränkte schiefadjungierte Multiplikatoren auf.

In Hilbert- C^* -Moduln gilt:

Satz 3.9. *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul. Dann gilt:*

$$\{T \in \mathcal{R}(E); T \text{ schiefadjungiert}\} = \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(E).$$

In den Beweis gehen entscheidend der Satz von Stone für Hilbert- C^* -Moduln (Satz 1.29) und Satz 1.30 ein.

Beweis. „ \subseteq “: Sei $T \in \mathcal{R}(E)$ schiefadjungiert. Dann ist $h := -iT$ selbstadjungiert. Es gilt $\mathbb{B}(E) \cong \mathcal{A}_l(E)$ (vgl. [BLM04], Corollary 8.4.2, oder Beispiel A.16). Nach Proposition 1.27 wird durch $U_t := \varphi_h(e_t) = \exp(ith)$ eine C_0 -Gruppe auf E mit $U_t \in \mathbb{B}(E) \cong \mathcal{A}_l(E)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, deren Erzeuger als C_0 -Gruppe nach Satz 1.30 gleich $ih = T$ ist.

„ \supseteq “: Sei $T \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(E)$ und T erzeuge die C_0 -Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf E mit $U_t \in \mathcal{A}_l(E) \cong \mathbb{B}(E)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann findet man nach Satz 1.29 (Satz von Stone) ein selbstadjungiertes $h \in \mathcal{R}(E)$ so, dass $U_t = \varphi_h(e_t) = \exp(ith)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Da ih nach Satz 1.30 Erzeuger der C_0 -Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist, folgt wegen der Eindeutigkeit des Erzeugers: $T = ih$. Also ist T schiefadjungiert. \square

Beispiel 3.10. *Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum. Für alle $q \in C(\Omega)$ definiere $M_q : D(M_q) \subseteq C_0(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega)$, $f \mapsto qf$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l^{C_0}(C_0(\Omega)) &= \left\{ M_q; q \in C(\Omega) \text{ mit } \sup_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re} q(\omega) < \infty \right\} \text{ und} \\ \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_0(\Omega)) &= \left\{ M_q; q \in C(\Omega) \text{ mit } \bar{q} = -q \right\}. \end{aligned}$$

Setze $X := C_0(\Omega)$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_l(X)$ der Linksmultiplikatoren auf dem Operatorraum X isomorph zu der Menge $\mathcal{M}_l(X)$ der Linksmultiplikatoren auf der C^* -Algebra X und $\mathcal{A}_l(X)$ isomorph zu der Menge $\mathcal{M}(X)$ der

3.1. C_0 -LINKSMULTIPLIKATOREN UND UNBESCHRÄNKTE SCHIEFADJUNGIERTE MULTIPLIKATOREN

Multiplikatoren auf der C^* -Algebra X (vgl. [BLM04], Corollary 8.4.2, oder Beispiel A.16). Da X eine kommutative C^* -Algebra ist, folgt somit:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_l(X) &\cong \mathcal{M}_l(X) = \mathcal{M}(X) \cong C_b(\Omega) \quad \text{und} \\ \mathcal{A}_l(X) &\cong \mathcal{M}(X) \cong C_b(\Omega).\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Nach dem obigen Beispiel gilt daher im allgemeinen: $\mathcal{M}_l(X) \neq \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ und $\{T \in \mathcal{A}_l(X); T \text{ schiefadjungiert}\} \neq \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.

Beweis von Beispiel 3.10. (i): „ \subseteq “: Sei A Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf $X := C_0(\Omega)$ mit $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach (3.1.1) gilt: $\mathcal{M}_l(X) \cong C_b(\Omega)$. Somit findet man für jedes $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein $m_t \in C_b(\Omega)$ mit $T_t = M_{m_t}$. Nach [EN00], Proposition I.4.6, findet man ein $q \in C(\Omega)$ mit $\sup_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re} q(\omega) < \infty$ derart, dass gilt: $m_t(\omega) = e^{tq(\omega)}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\omega \in \Omega$. Nach [EN00], II.2.9, ist somit M_q Erzeuger von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$.

„ \supseteq “: Sei $q \in C(\Omega)$ mit $\sup_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re} q(\omega) < \infty$. Nach [EN00], S. 27 und Proposition I.4.5, erzeugt M_q eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X , wobei $T_t = M_{e^{tq}} \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.

(ii) folgt durch Nachrechnen oder mit Satz 3.9 und Beispiel 1.10. \square

Für die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ auf einem Hilbertraum H gilt:

Beispiel 3.11. *Sei H ein Hilbertraum. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_l^{C_0}(\mathcal{K}(H)) &\cong \{A : D(A) \subseteq H \rightarrow H; \\ &\quad A \text{ ist Erzeuger einer } C_0\text{-Halbgruppe auf } H\} \text{ und} \\ \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{K}(H)) &\cong \{A : D(A) \subseteq H \rightarrow H; A \text{ ist linear,} \\ &\quad \text{dicht definiert und abgeschlossen mit } A^* = -A\}.\end{aligned}$$

Setze $X := \mathcal{K}(H)$. Wie man sieht, hängen unbeschränkte Multiplikatoren auf dem Operatorraum $X \subseteq L(H)$ mit Erzeugern von C_0 -Halbgruppen (bzw. C_0 -Gruppen) auf H zusammen. Im Abschnitt 3.7 wird untersucht, wie man für einen beliebigen Operatorraum $Y \subseteq L(K)$ C_0 -Halbgruppen auf K in C_0 -Halbgruppen auf Y überführen kann.

Zum Beweis des ersten Teils von Beispiel 3.11 verwenden wir das folgende

Lemma 3.12 ([Bla06], Proposition I.8.1.4). *Seien X, Y, Z Banachräume. Sei $T_0 \in L(Y, Z)$ und $(T_\lambda)_\lambda$ ein gleichmäßig beschränktes Netz in $L(Y, Z)$ mit $T_\lambda \xrightarrow{\lambda} T_0$ stark. Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Dann gilt: $\|T_\lambda K - T_0 K\| \xrightarrow{\lambda} 0$.*

Beweis von Beispiel 3.11. (i): „ \subseteq “: Sei $B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(\mathcal{K}(H))$. Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die von B erzeugte C_0 -Halbgruppe auf $\mathcal{K}(H)$ mit $T_t \in \mathcal{M}_l(\mathcal{K}(H))$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $\mathcal{K}(H)$ eine C^* -Algebra ist, gilt: $\mathcal{M}_l(\mathcal{K}(H)) \cong \mathcal{M}_l(\mathcal{K}(H))$ (vgl. [BLM04], Corollary 8.4.2, oder Beispiel A.16). Wegen $\mathcal{M}_l(\mathcal{K}(H)) \cong L(H)$ findet man für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein $S_t \in L(H)$ mit $T_t = L_{S_t}$, wobei

$$L_{S_t} : \mathcal{K}(H) \rightarrow \mathcal{K}(H), K \mapsto S_t \circ K.$$

Dann ist $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe auf H . Da $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ stark stetig ist, gilt für alle $K \in \mathcal{K}(H)$:

$$\|S_t \circ K - K\| = \|T_t(K) - K\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Insbesondere folgt: $S_t \rightarrow \text{id}_H$ für $t \rightarrow 0$ stark. Somit ist $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ stark stetig.

„ \supseteq “: Sei A Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf H . Nach der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) findet man ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ so, dass gilt:

$$\forall t \in [0, \delta] : \|S_t\| \leq M.$$

Definiere $T_t := L_{S_t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe auf $\mathcal{K}(H)$ mit $T_t \in \mathcal{M}_l(\mathcal{K}(H))$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $(S_t)_{t \in [0, \delta]}$ ein gleichmäßig beschränktes Netz ist, erhält man mit Lemma 3.12 für alle $K \in \mathcal{K}(H)$:

$$\|T_t(K) - K\| = \|S_t \circ K - K\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Also ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $\mathcal{K}(H)$. Offensichtlich gilt: $T_t \in \mathcal{M}_l(\mathcal{K}(H))$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii) folgt mit Satz 3.9 und Beispiel 1.10. □

3.2 Unbeschränkte Multiplikatoren auf Operator- räumen

In diesem Abschnitt wird eine weitere Art von Multiplikatoren auf einem Operatorraum X definiert, nämlich die unbeschränkten Multiplikatoren (als Menge: $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$), die wir mit Hilfe der unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikatoren $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ aus Definition 3.4 definieren. Wir verwenden verschiedene Aussagen über $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$, um Eigenschaften von $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ zu zeigen.

3.2. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN AUF OPERATORRÄUMEN

Für die unbeschränkten Multiplikatoren auf einem beliebigen Hilbert- C^* -Modul E gilt das wichtige Resultat: $\mathcal{R}(E) = \mathcal{A}_l^{C_0}(E)$. Also sind die unbeschränkten Multiplikatoren eine Verallgemeinerung der regulären Operatoren auf Operatorräume.

Weiterhin beweisen wir, dass $\mathcal{A}_l(X) \subseteq \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ gilt und dass in unitalen Operatorräumen Gleichheit vorliegt.

Für einen beliebigen Hilbert- C^* -Modul E gilt $E \oplus E \cong C_2(E)$ (Proposition 2.14), wobei mit $C_2(X) = M_{2,1}(X)$ für einen beliebigen Operatorraum X der Spaltenoperatorraum bezeichnet wird. Daher benutzen wir in Operatorräumen analog zu Definition 1.33 die folgende Notation:

Notation 3.13. Sei X ein Operatorraum. Sei $A_i : D(A_i) \subseteq X \rightarrow X$ ein Operator für alle $i \in \underline{4}$. Definiere

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} : (D(A_1) \cap D(A_3)) \times (D(A_2) \cap D(A_4)) \subseteq C_2(X) \rightarrow C_2(X),$$

$$(x, y) \mapsto (A_1x + A_2y, A_3x + A_4y).$$

Definition 3.14. Sei X ein Operatorraum.

- (i) Eine Abbildung $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$ heißt **unbeschränkter Multiplikator** auf X , falls ein $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ existiert mit der Eigenschaft: $\tilde{T} := i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$, d. h. \tilde{T} erzeugt eine C_0 -Gruppe $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf $C_2(X)$ mit $U_t \in \mathcal{A}_l(C_2(X))$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) Mit $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ wird die Menge der unbeschränkten Multiplikatoren auf X bezeichnet.

Der Operator S aus (i) ist, wie in Proposition 3.50 gezeigt wird, eindeutig. Ist X ein Hilbert- C^* -Modul, so erhält man: $S = T^*$ (Satz 3.21). Somit kann man S als die Adjungierte von T ansehen.

Ein beliebiges $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

Proposition 3.15. Sei X ein Operatorraum und $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Dann gilt:

- (i) T ist dicht definiert und abgeschlossen.
- (ii) Nach Definition findet man ein $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ ist. Dann ist S ebenfalls dicht definiert und abgeschlossen.

Diese Proposition beweist man mit dem folgenden Lemma, welches man leicht durch Nachrechnen zeigt:

Lemma 3.16. *Sei X ein Operatorraum, seien $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ und $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *A und B sind abgeschlossen.*
- (b) *$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} : D(B) \times D(A) \subseteq C_2(X) \rightarrow C_2(X)$ ist abgeschlossen, wobei $D(B) \times D(A)$ mit der von $C_2(X)$ induzierten Norm versehen wird.*

Die Menge $\mathcal{A}_l(X)$ der beschränkten, von links adjungierbaren Multiplikatoren ist in $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ enthalten:

Proposition 3.17. *Sei X ein Operatorraum. Dann gilt: $\mathcal{A}_l(X) \subseteq \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.*

In den Beweis dieser Proposition geht das folgende Lemma ein:

Lemma 3.18. *Sei X ein Operatorraum und $T \in \mathcal{A}_l(X)$. Sei $a := \Theta^{-1}(T)$, also $a \in \mathcal{IM}_\ell^*(X)$ und $j(Tx) = a \cdot j(x)$ für alle $x \in X$ (siehe Proposition A.13). Dann ist $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_l(C_2(X))$ selbstadjungiert. Sei*

$$j_{2,1} : C_2(X) \rightarrow C_2(I(X)), x \mapsto \begin{pmatrix} j(x_1) \\ j(x_2) \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $j_{2,1}(\hat{T}x) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^ & 0 \end{pmatrix} \cdot j_{2,1}(x)$ für alle $x \in C_2(X)$.*

Beweis. Nach (A.2.1) gilt: $j(T^*y) = a^* \cdot j(y)$ für alle $y \in X$. Also ergibt sich:

$$j_{2,1}(\hat{T}x) = \begin{pmatrix} j(Tx_2) \\ j(T^*x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot j(x_2) \\ a^* \cdot j(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \cdot j_{2,1}(x)$$

für alle $x \in C_2(X)$. Es ist $\hat{a} := \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \in M_2(I_{11}(X))$ mit $\hat{a}^* = \hat{a}$. Da j und somit auch $j_{2,1}$ vollständige Isometrien sind, folgt $\hat{T} \in \mathcal{A}_l(C_2(X))$ und $\hat{T}^* = \hat{T}$. \square

Beweis von Proposition 3.17. Sei $T \in \mathcal{A}_l(X)$. Nach Lemma 3.18 ist $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_l(C_2(X))$ selbstadjungiert. Es gilt für jeden Operatorraum Y nach Proposition 3.5:

$$\{A \in \mathcal{A}_l(Y) ; A^* = -A\} \subseteq \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(Y).$$

3.2. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN AUF OPERATORRÄUMEN

Da $i\hat{T}$ schiefadjungiert ist, folgt $i\hat{T} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$, also $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. \square

In unitalen Operatorräumen (siehe Definition 2.38) gilt, analog zu Proposition 3.8:

Proposition 3.19. *Sei X ein unitaler Operatorraum. Dann gilt: $\mathcal{A}_l(X) = \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.*

Zum Beweis notieren wir das folgende

Lemma 3.20. *Sei X ein unitaler Operatorraum. Seien $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$ und $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ Operatoren mit $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_l(C_2(X))$ und $\hat{T}^* = \hat{T}$.*

(i) *Es gilt: $S, T \in \mathcal{A}_l(X)$ und $S^* = T$.*

(ii) *Es existiert ein $a \in \mathcal{IM}_\ell^*(X)$ mit der Eigenschaft: $j_{2,1}(\hat{T}x) = a \cdot j_{2,1}(x)$ für alle $x \in C_2(X)$.*

Beweis. Mit e_X sei das Einselement von X bezeichnet. Weil die Definition eines unitalen Operatorraumes unabhängig von der Einbettung in eine spezielle C^* -Algebra ist (Anmerkung 2.39), findet man o.B.d.A. einen Hilbertraum H mit $X \subseteq L(H)$ und $e_X = \text{id}_H$.

Betrachte $\Theta^{-1}|_{\mathcal{A}_l(C_2(X))} : \mathcal{A}_l(C_2(X)) \rightarrow \mathcal{IM}_\ell^*(C_2(X))$, und setze ferner $c := \Theta^{-1}(\hat{T}) \in \mathcal{IM}_\ell^*(C_2(X)) \subseteq I_{11}(C_2(X))$. Es gilt: $I_{11}(C_2(X)) \cong I_{11}(M_2(X))$ (Proposition A.6). Weiter sind

$$p_1 := \text{id}_H \oplus 0, p_2 := (\text{id}_H \oplus \text{id}_H) - p_1 \in I_{11}(M_2(X))$$

Projektionen. Bezüglich p_1 und p_2 kann man c schreiben als $c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Es gilt für alle $x \in X$:

$$\begin{pmatrix} j(Tx) \\ 0 \end{pmatrix} = j_{2,1} \left(\hat{T} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = c \cdot j_{2,1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \beta \cdot j(x) \\ \delta \cdot j(x) \end{pmatrix},$$

also $j(Tx) = \beta \cdot j(x)$ und $0 = \delta \cdot j(x)$. Analog ergibt sich: $j(Sx) = \gamma \cdot j(x)$ und $0 = \alpha \cdot j(x)$ für alle $x \in X$. Es ergibt sich mit [BLM04], Proposition 4.4.12, oder Proposition A.7: $\alpha = 0$ und $\delta = 0$. Da $\mathcal{IM}_\ell^*(C_2(X))$ und $\mathcal{A}_l(C_2(X))$ nach [Zar01], Proposition 1.7.4, oder Proposition A.13 unter Θ als unitalen C^* -Algebren isomorph sind, folgt:

$$c^* = \Theta^{-1}(\hat{T}^*) = \Theta^{-1}(\hat{T}) = c.$$

Man hat: $\beta^* = (p_1 \cdot c \cdot p_2)^* = p_2 \cdot c \cdot p_1 = \gamma$. Somit gilt $\beta^* \cdot j(x) = \gamma \cdot j(x) \in j(X)$ für alle $x \in X$, also $T \in \mathcal{A}_l(X)$. Weiter erhält man: $S \in \mathcal{A}_l(X)$ und $S^* = \Theta(\gamma)^* = \Theta(\beta) = T$. \square

Beweis von Proposition 3.19. „ \subseteq “ folgt mit Proposition 3.17.

„ \supseteq “: Sei $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Dann findet man ein $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass gilt: $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Setze $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix}$. Für jeden Operatorraum Y hat man nach Proposition 3.8:

$$\{A \in \mathcal{A}_l(Y); A^* = -A\} = \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(Y).$$

Somit ergibt sich $(i\hat{T})^* = -i\hat{T} \in \mathcal{A}_l(C_2(X))$, also $\hat{T}^* = \hat{T}$. Mit Lemma 3.20 erhält man: $T \in \mathcal{A}_l(X)$. \square

Der folgende wichtige Satz zeigt, dass auf einem Hilbert- C^* -Modul die unbeschränkten Multiplikatoren mit den regulären Operatoren übereinstimmen. Damit sind jene eine Verallgemeinerung der regulären Operatoren auf Operatorräume.

Satz 3.21. *Sei E ein Hilbert- C^* -Modul.*

(i) *Es gilt: $\mathcal{A}_l^{C_0}(E) = \mathcal{R}(E)$.*

(ii) *Sei $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(E)$. Nach Definition findet man ein $S : D(S) \subseteq E \rightarrow E$ derart, dass $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(E))$ ist. Dann gilt: $T^* = S \in \mathcal{R}(E)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst (ii) und „ \subseteq “ von (i). Sei $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(E)$ und $\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix}$, also $i\hat{T} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(E))$. Es gilt: $C_2(E) \cong E \oplus E$ (Beispiel A.16). Mit Satz 3.9 erhält man:

$$\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(E)) \cong \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(E \oplus E) = \{R \in \mathcal{R}(E \oplus E); R^* = -R\}. \quad (3.2.1)$$

Somit ist $i\hat{T} \in \mathcal{R}(E \oplus E)$ schiefadjungiert.

Nach Proposition 3.15 sind S und T abgeschlossen und dicht definiert. Nach Lemma 1.34 gilt: $\begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & S^* \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\hat{T}^* = \hat{T}$ folgt $S = T^*$, insbesondere ist T^* dicht definiert.

Zu zeigen bleibt: $1 + T^*T$ hat dichtes Bild. Es gilt:

$$(1 + \hat{T}^*\hat{T})(x, y) = (x, y) + (TT^*x, T^*Ty) = ((1 + TT^*)x, (1 + T^*T)y)$$

3.3. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN C_0 -HALBGRUPPEN AUF X UND AUF $C_2(X)$

für alle $(x, y) \in D(1 + \hat{T}^* \hat{T})$. Weil $\|y\| \leq \|(x, y)\|$ nach (1.3.1) für alle $x, y \in E$ gilt und weil $1 + \hat{T}^* \hat{T}$ dichtes Bild in $E \oplus E$ hat, folgt: $1 + T^* T$ hat dichtes Bild in E . Somit ist T regulär.

Mit [Lan95], Corollary 9.6, folgt: $T^* \in \mathcal{R}(E)$.

Es bleibt „ \supseteq “ von (i) zu zeigen. Sei dazu $T \in \mathcal{R}(E)$. Nach Proposition 1.35 ist $h := \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ regulär und selbstadjungiert. Mit (3.2.1) ergibt sich $ih \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(E))$, also $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(E)$. \square

Mit dem obigen Satz folgt, dass im allgemeinen nicht $\mathcal{A}_l(X) = \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ gilt:

Beispiel 3.22. Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum, der nicht kompakt ist. Dann gilt:

$$\mathcal{A}_l(C_0(\Omega)) \cong C_b(\Omega) \neq C(\Omega) \cong \mathcal{A}_l^{C_0}(C_0(\Omega)).$$

Beweis. Da $X := C_0(\Omega)$ eine kommutative C^* -Algebra ist, ergibt sich mit [BLM04], Corollary 8.4.2, oder Beispiel A.16: $\mathcal{A}_l(X) \cong \mathcal{M}(X) \cong C_b(\Omega)$. Nach [Wor91], Example 2, oder Beispiel 1.10 gilt: $\mathcal{R}(X) = C(\Omega)$. Man erhält mit Satz 3.21: $\mathcal{A}_l^{C_0}(X) = \mathcal{R}(X) \cong C(\Omega)$. \square

3.3 Zusammenhang zwischen C_0 -Halbgruppen auf X und auf $C_2(X)$

Wir untersuchen in diesem Abschnitt, unter welchen Voraussetzungen die Operatoren A und $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ auf einem Operatorraum X (bzw. auf dem Spaltenoperatorraum $C_2(X)$) eine C_0 -Halbgruppe erzeugen und welche Beziehung zwischen diesen beiden Operatoren besteht. Als wichtiges Resultat werden wir eine intrinsische Charakterisierung der Elemente aus $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ und $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ beweisen.

Zwischen Halbgruppen auf X und $C_2(X)$ besteht der folgende Zusammenhang:

Proposition 3.23. Sei X ein Operatorraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Familie in $L(X)$. Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ setze $S_t := T_t \oplus \text{id}_X := \begin{pmatrix} T_t & 0 \\ 0 & \text{id}_X \end{pmatrix}$. Es gilt:

- (i) $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist genau dann eine Operatorhalbgruppe (bzw. C_0 -Halbgruppe) auf X , wenn $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe (bzw. C_0 -Halbgruppe) auf $C_2(X)$ ist.

(ii) Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$. Dann ist A genau dann Erzeuger von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$, wenn $\eta_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : D(A) \times X \subseteq C_2(X) \rightarrow C_2(X)$ Erzeuger von $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist.

Beweis. (i): Offensichtlich ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ genau dann eine Operatorhalbgruppe, wenn $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe ist.

Somit bleibt zu zeigen, dass $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ genau dann stark stetig ist, wenn $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ stark stetig ist.

„ \Rightarrow “: Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X . Es gilt für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C_2(X)$:

$$\left\| S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \|T_t x - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

„ \Leftarrow “ folgt analog zu „ \Rightarrow “.

(ii): Wegen

$$\left\| \frac{S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{t} - \eta_A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{t}(T_t x - x) - Ax \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{T_t x - x}{t} - Ax \right\|$$

für alle $x \in D(A)$, $y \in X$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$ folgt die Behauptung. \square

Die Operatoren A und $\eta_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hängen wie folgt zusammen:

Lemma 3.24. Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear.

(i) $D(A)$ ist genau dann dicht in X , wenn $D(A) \times X$ dicht in $C_2(X)$ ist, wobei $D(A) \times X$ mit der von $C_2(X)$ induzierten Norm versehen wird.

(ii) A ist genau dann abgeschlossen, wenn η_A abgeschlossen ist.

(iii) Sei A abgeschlossen. Dann gilt: $\rho(A) \setminus \{0\} = \rho(\eta_A)$. Insbesondere hat man: $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(A) \iff \mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(\eta_A)$.

(iv) Sei A abgeschlossen, $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Resolvente:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \|R(\lambda, A)_n\| \leq \|R(\lambda, \eta_A)_n\|, \\ (II) \quad & \left\| \lambda R(\lambda, \eta_A)_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq \|\lambda R(\lambda, A)_n x\| + \|y\| \text{ für alle } x, y \in M_n(X), \\ & \text{insbesondere } \| \lambda R(\lambda, \eta_A)_n \| \leq \| \lambda R(\lambda, A)_n \| + 1. \end{aligned}$$

Beweis. (i) und (ii) erhält man unmittelbar.

3.3. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN C_0 -HALBGRUPPEN AUF X UND AUF $C_2(X)$

(iii): Es gilt: $0 \notin \rho(\eta_A)$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $\lambda \text{id}_X - A$ genau dann bijektiv auf X , wenn $\lambda \text{id}_{C_2(X)} - \eta_A = \begin{pmatrix} \lambda \text{id}_X - A & 0 \\ 0 & \lambda \text{id}_X \end{pmatrix}$ bijektiv auf $C_2(X)$ ist. Somit folgt (iii).

(iv): (I): Es gilt für alle $x \in X$:

$$\|R(\lambda, A)x\| = \left\| R(\lambda, \eta_A) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \|R(\lambda, \eta_A)\| \cdot \|x\|.$$

(II): Es gilt für alle $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} \left\| \lambda R(\lambda, \eta_A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \lambda \begin{pmatrix} R(\lambda, A)x \\ (\lambda \text{id}_X)^{-1}y \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x\| + \|y\| \leq (\|\lambda R(\lambda, A)\| + 1) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

□

Für C_0 -Halbgruppen auf Operatorräumen definieren wir:

Definition 3.25. Sei X ein Operatorraum. Eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$) auf X heißt **vollständig kontraktiv**, falls T_t für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (bzw. $t \in \mathbb{R}$) vollständig kontraktiv ist.

Es sei daran erinnert, dass auf einem Operatorraum X mit $\mathcal{M}_l(X)$ die Menge der Linksmultiplikatoren bezeichnet wird, die mit der Multiplikatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_l(X)}$ versehen wird (siehe Definition A.1).

Der folgende Satz stellt mit Hilfe von η_A eine intrinsische Charakterisierung der Elemente von $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ bereit, die insbesondere nicht auf $\mathcal{A}_l(X)$ zurückgreift:

Satz 3.26. Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$.

(i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) A erzeugt eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X mit T_t aus der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_{\mathcal{M}_l(X)}(0, 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- (b) η_A erzeugt eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe auf $C_2(X)$.

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.
- (b) η_A erzeugt eine vollständig kontraktive C_0 -Gruppe auf $C_2(X)$.

Zum Beweis verwenden wir das folgende Lemma, welches man leicht nachrechnet:

Lemma 3.27. *Sei X ein Operatorraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine vollständig kontraktive C_0 -Gruppe auf X . Dann ist T_t eine vollständig isometrische Bijektion auf X für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis von Satz 3.26. (i): „(a) \Rightarrow (b)“: Es gelte (a). Weiter ist $T_t \oplus \text{id}_X$ nach Satz A.10 (Charakterisierung der Linksmultiplikatoren) vollständig kontraktiv für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach Proposition 3.23 ist $(T_t \oplus \text{id}_X)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger η_A .

„(b) \Rightarrow (a)“: Sei $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die von η_A erzeugte vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe. Mit Proposition 3.23 erhält man, dass A eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ erzeugt und dass gilt: $S_t = T_t \oplus \text{id}_X$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach Satz A.10 ist $T_t \in \overline{B_{\mathcal{M}_l(X)}}(0, 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii) folgt analog unter Verwendung von Proposition A.15 (Charakterisierung der unitären Elementen von $\mathcal{A}_l(C_2(X))$) und Lemma 3.27. \square

Ist $(T_t \oplus \text{id}_X)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf $C_2(X)$ eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe, so ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ insbesondere vollständig kontraktiv. Die Umkehrung gilt i. a. jedoch nicht:

Beispiel 3.28. *Setze $H := L^2(\mathbb{R})$. Sei $T_t : H^r \rightarrow H^r, f \mapsto e^{ti \text{id}_{\mathbb{R}}} f$, für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei mit H^r der Zeilen-Hilbertoperatorraum bezeichnet wird (siehe Proposition 2.16). Dann gilt:*

(i) $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist eine C_0 -Halbgruppe auf H^r mit der Eigenschaft: $\|T_t\|_{cb} = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{> 0}$. Es ist $(T_t \oplus \text{id}_{H^r})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $C_2(H^r)$ mit $\|\lambda T_1 \oplus \text{id}_{H^r}\| \geq \sqrt{1 + \lambda^2}$. Insbesondere sieht man für $\lambda = 1$, dass diese Halbgruppe nicht kontraktiv ist.

Beweis. (i): Offensichtlich ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe, die nach [EN00], Proposition I.4.11, stark stetig ist.

Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für alle $f \in X := H^r$ gilt:

$$\|T_t f\|^2 = \langle e^{ti \text{id}_{\mathbb{R}}} f, e^{ti \text{id}_{\mathbb{R}}} f \rangle = \|f\|^2. \quad (3.3.1)$$

Mit [Pau02], S. 200, folgt: $\|T_t\|_{cb} = \|T_t\| = 1$.

(ii): Nach Proposition 3.23 ist $(T_t \oplus \text{id}_X)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $C_2(X)$.

3.4. DIE SÄTZE VON HILLE-YOSIDA UND VON LUMER-PHILLIPS IN OPERATORRÄUMEN

Für alle $f, g \in X$ folgt mit [ER00], S. 55, oder Proposition 2.16:

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{C_2(X)}^2 = \left\| \begin{pmatrix} \langle f, f \rangle & \langle f, g \rangle \\ \langle g, f \rangle & \langle g, g \rangle \end{pmatrix} \right\|_{M_2}. \quad (3.3.2)$$

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto e^{-is} \cdot 1_{[0, 2\pi]}$ und $g := 1_{[0, 2\pi]}$, wobei $1_{[0, 2\pi]}$ die charakteristische Funktion auf $[0, 2\pi]$ bezeichne. Es gilt: $\|f\|^2 = 2\pi = \|g\|^2$, $\langle f, g \rangle = 0$ und $\langle g, T_1 f \rangle = \int_0^{2\pi} e^{is} e^{-is} ds = 2\pi$. Mit (3.3.2) und (3.3.1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{C_2(X)}^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix} \right\|_{M_2} = 2\pi \quad \text{und} \\ \left\| \begin{pmatrix} \lambda T_1 f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{C_2(X)}^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \lambda^2 \langle T_1 f, T_1 f \rangle & \lambda \langle T_1 f, g \rangle \\ \lambda \langle g, T_1 f \rangle & \langle g, g \rangle \end{pmatrix} \right\|_{M_2} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \lambda^2 2\pi & \lambda 2\pi \\ \lambda 2\pi & 2\pi \end{pmatrix} \right\|_{M_2} = 2\pi(1 + \lambda^2). \end{aligned}$$

Man erhält: $\|\lambda T_1 \oplus \text{id}_X\| \geq \sqrt{1 + \lambda^2}$. □

Mit Satz 3.26 erhält man eine intrinsische Charakterisierung der Elemente von $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$:

Satz 3.29. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.
- (b) *Es existiert eine Abbildung $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ mit der Eigenschaft, dass $i \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Gruppe auf $C_2(C_2(X)) \cong C_4(X)$ ist.*

3.4 Die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips in Operatorräumen

In Satz 3.26 und Satz 3.29 werden unbeschränkte Multiplikatoren mit Hilfe von Erzeugern vollständig kontraktiver C_0 -Halbgruppen bzw. C_0 -Gruppen charakterisiert. Daher ist von Interesse, wann ein Operator Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe (bzw. C_0 -Gruppe) ist.

Charakterisierungen hierfür werden in diesem Abschnitt bereitgestellt. So werden Analoga des Satzes von Hille-Yosida und des Satzes von Lumer-Phillips in Operatorräumen gezeigt.

Eine entsprechende Version von Satz B.11 gilt in Operatorräumen:

Satz 3.30. *Sei X ein Operatorraum, $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Sei A der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X mit der Eigenschaft:*

$$\|T_t\|_{cb} \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ und alle $k, n \in \mathbb{N}$:

- (i) $R(\lambda, A_n)^k x = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty s^{k-1} e^{-\lambda s} T_s^{(n)} x \, ds$ für alle $x \in M_n(X)$,
- (ii) $\left\| R(\lambda, A)^k \right\|_{cb} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^k}.$

Zum Beweis formulieren wir die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 3.31. *Sei X ein Operatorraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X mit Erzeuger A . Dann ist $(T_t^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $M_n(X)$ mit Erzeuger A_n für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Offensichtlich ist $(T_t^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe. Die C_0 -Eigenschaft von $(T_t^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ und die Eigenschaft, dass A_n Erzeuger ist, erhält man mit der Ungleichung $\|x\|_n \leq \sum_{i,j=1}^n \|x_{ij}\|$ für alle $x \in M_n(X)$ (Lemma 2.7). \square

Durch einfache Umformungen erhält man:

Lemma 3.32. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann gilt für alle $\lambda \in \rho(A)$ und $n \in \mathbb{N}$: $R(\lambda, A_n) = R(\lambda, A)_n$.*

Beweis von Satz 3.30. (i): Nach Lemma 3.31 ist A_n Erzeuger der C_0 -Halbgruppe $(T_t^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. Mit Satz B.11 erhält man für alle $x \in M_n(X)$:

$$R(\lambda, A_n)^k x = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty s^{k-1} e^{-\lambda s} T_s^{(n)} x \, ds.$$

(ii): Mit Lemma 3.32 und (i) ergibt sich für alle $x \in M_n(X)$:

$$\begin{aligned} \left\| \left(R(\lambda, A)^k \right)_n x \right\| &= \left\| R(\lambda, A_n)^k x \right\| \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left\| \int_0^\infty s^{k-1} e^{-\lambda s} T_s^{(n)} x \, ds \right\| \\ &\leq \frac{M}{(k-1)!} \int_0^\infty s^{k-1} e^{(\omega - \operatorname{Re} \lambda)s} \, ds \|x\| \\ &= \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^k} \|x\|. \end{aligned}$$

\square

3.4. DIE SÄTZE VON HILLE-YOSIDA UND VON LUMER-PHILLIPS IN OPERATORRÄUMEN

Analog zum Satz von Hille-Yosida für kontraktive C_0 -Halbgruppen (Satz B.12) gilt im Operatorraum:

Satz 3.33 (Satz von Hille-Yosida für vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppen). *Sei X ein Operatorraum. Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ist genau dann Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe, wenn A dicht definiert und abgeschlossen ist, $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(A)$ gilt und*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_{cb} \leq 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Im Beweis des Satzes verwenden wir das folgende Lemma. Es beschreibt die Resolventenmengen der Amplifikationen und folgt durch direktes Nachrechnen.

Lemma 3.34. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann gilt: $\rho(A_n) = \rho(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis von Satz 3.33. „ \Rightarrow “ folgt mit dem Satz von Hille-Yosida (Satz B.12) und mit der Abschätzung der Resolvente aus Satz 3.30.

„ \Leftarrow “: Nach Satz B.12 erzeugt A eine kontraktive C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X . Sei $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist A_n abgeschlossen und dicht definiert. Ferner gilt: $R(\lambda, A)_n = R(\lambda, A_n)$ (Lemma 3.32). Mit Lemma 3.34 erhält man: $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(A) = \rho(A_n)$. Daher folgt mit Satz B.12: $\|T_t^{(n)}\| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Also erzeugt A eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe. \square

Entsprechend zu Satz 3.33 beweist man den Satz von Hille-Yosida für beliebige C_0 -Halbgruppen in Operatorräumen:

Satz 3.35 (Satz von Hille-Yosida im Operatorraum, allgemeiner Fall). *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *A erzeugt eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit*

$$\|T_t\|_{cb} \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(b) *A ist dicht definiert, abgeschlossen mit $\mathbb{R}_{>\omega} \subseteq \rho(A)$, und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}_{>\omega}$ gilt:*

$$\|[(\lambda - \omega)R(\lambda, A)]^k\|_{cb} \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Man erhält eine Version des Satzes von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen (Satz B.22) auf Operatorräumen:

Satz 3.36 (Satz von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen im Operatorraum). *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *A erzeugt eine C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft:*

$$\|T_t\|_{cb} \leq M e^{\omega|t|} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(b) *A und $-A$ erzeugen C_0 -Halbgruppen $(T_t^+)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ bzw. $(T_t^-)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$, die folgendes erfüllen:*

$$\|T_t^+\|_{cb}, \|T_t^-\|_{cb} \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(c) *A ist dicht definiert, abgeschlossen und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > \omega$ gilt $\lambda \in \rho(A)$ und*

$$\|[(|\lambda| - \omega)R(\lambda, A)]^k\|_{cb} \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“ folgt mit dem Text vor Satz B.22 (Satz von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen).

„(b) \Rightarrow (c)“: Es gelte (b). Nach Satz B.22 ist A dicht definiert und abgeschlossen mit $] -\infty, -\omega[\cup]\omega, \infty[\subseteq \rho(A)$. Nach Lemma 3.31 erzeugt A_n (bzw. $-A_n$) die C_0 -Halbgruppe $((T_t^+)^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. $((T_t^-)^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$) mit der Eigenschaft:

$$\|(T_t^+)^{(n)}\|, \|(T_t^-)^{(n)}\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Mit $R(\lambda, A)_n = R(\lambda, A_n)$ (Lemma 3.32), $\rho(A) = \rho(A_n)$ (Lemma 3.34) und Satz B.22 folgt:

$$\|[(|\lambda| - \omega)R(\lambda, A)_n]^k\| = \|[(|\lambda| - \omega)R(\lambda, A_n)]^k\| \leq M \quad (3.4.1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > \omega$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

„(c) \Rightarrow (a)“: Es gelte (c). Nach Satz B.22 erzeugt A eine C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf X . Weiter ist A_n dicht definiert, abgeschlossen und erzeugt $(T_t^{(n)})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ nach Lemma 3.31. Nach Lemma 3.34 hat man $\rho(A_n) = \rho(A)$, und es gilt (3.4.1). Mit Satz B.22 folgt somit (a). \square

Auch für den Satz von Lumer-Phillips (Satz B.20) beweisen wir eine entsprechende Fassung in Operatorräumen. Bevor wir diese formulieren, führen wir zunächst den folgenden Begriff ein:

3.4. DIE SÄTZE VON HILLE-YOSIDA UND VON LUMER-PHILLIPS IN OPERATORRÄUMEN

Definition 3.37. Sei X ein Operatorraum. Man nennt einen Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ **vollständig dissipativ**, falls A_n dissipativ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, d. h.

$$\|(\lambda - A_n)x\| \geq \lambda\|x\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } x \in D(A_n).$$

Satz 3.38 (Satz von Lumer-Phillips für vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppen). *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear und dicht definiert. Dann erzeugt A genau dann eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe, wenn A vollständig dissipativ ist und ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, dass $\lambda - A$ surjektiv auf X ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: A erzeuge eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe. Nach Satz 3.35 (Satz von Hille-Yosida) gilt $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(A)$ und $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{cb} \leq 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, also folgt

$$\|(\lambda - A)_n x\| \geq \frac{1}{\|(\lambda - A)_n^{-1} x\|} \geq \lambda\|x\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in D(A_n)$.

„ \Leftarrow “ folgt mit dem Satz von Lumer-Phillips (Satz B.20). □

Für einen beliebigen Banachraum X liefert der obige Satz unter Verwendung der minimalen Operatorraumstruktur $\min(X)$ (siehe Definitions-Proposition 2.12) gerade den Satz von Lumer-Phillips für Banachräume (Satz B.20), also ist Satz 3.38 eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Ebenso sind die hier formulierten Sätze von Hille-Yosida für Operatorräume Verallgemeinerungen der entsprechenden Sätze in Banachräumen.

Mit Hilfe des Satzes von Hille-Yosida für vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppen (Satz 3.33) und des Satzes von Lumer-Phillips in Operatorräumen (Satz 3.38) erhält man die folgende Charakterisierung von bestimmten C_0 -Linksmultiplikatoren:

Proposition 3.39. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *A erzeugt eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X mit T_t aus der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_{\mathcal{M}_l(X)}(0, 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.*
- (b) *A ist dicht definiert und abgeschlossen mit $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(A)$ und*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_{cb} \leq 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

(c) A ist dicht definiert, η_A vollständig dissipativ, und es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $\lambda - A$ surjektiv auf X ist.

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“: Es gelte (a). Nach Satz 3.26 (Charakterisierung von $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$) mittels η_A erzeugt η_A eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe auf $C_2(X)$. Nach dem Satz von Hille-Yosida für vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppen (Satz 3.33) ist η_A dicht definiert und abgeschlossen mit $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(\eta_A)$ und

$$\|\lambda R(\lambda, \eta_A)\|_{cb} \leq 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Dann ist A nach Lemma 3.24 dicht definiert und abgeschlossen, und es gilt: $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(\eta_A) = \rho(A) \setminus \{0\}$.

„(b) \Rightarrow (c)“: Es gelte (b). Nach Lemma 3.24 ist η_A dicht definiert und abgeschlossen, und es gilt: $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(\eta_A)$. Es folgt mit Satz 3.33, dass η_A Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe ist. Mit dem Satz von Lumer-Phillips im Operatorraum (Satz 3.38) erhält man, dass η_A vollständig dissipativ ist. Wegen $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(A)$ folgt die Existenz des gesuchten λ .

„(c) \Rightarrow (a)“: Es gelte (c). Dann ist $\lambda - \eta_A$ surjektiv auf $C_2(X)$. Nach Lemma 3.24 ist η_A dicht definiert. Es ergibt sich mit Satz 3.38, dass η_A eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe auf $C_2(X)$ erzeugt. Mit Satz 3.26 erhält man (a). \square

Unter Verwendung des Satzes von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen im Operatorraum (Satz 3.36) erhält man eine entsprechende Aussage für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$:

Proposition 3.40. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.

(b) A ist dicht definiert und abgeschlossen mit $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \rho(A)$ und

$$\|\lambda R(\lambda, \eta_A)\|_{cb} \leq 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) A ist dicht definiert, η_A und $-\eta_A$ sind vollständig dissipativ, und es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $\lambda - A$ und $\mu + A$ surjektiv auf X sind.

Mit der obigen Proposition folgt zusammen mit Satz 3.26 (Charakterisierung von $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$) mittels η_A die folgende Charakterisierung der Elemente aus $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$:

Proposition 3.41. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

3.5. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN VON X AUF $\mathcal{T}(X)$ ÜBERFÜHREN

(a) $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$.

(b) Es existiert ein $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass $\tilde{A} := i \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ dicht definiert und abgeschlossen ist mit $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \rho(\tilde{A})$ und

$$\| |\lambda| R(\lambda, \eta_{\tilde{A}}) \|_{cb} \leq 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Es existiert ein $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ mit den folgenden Eigenschaften:
 $\tilde{A} := i \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ ist dicht definiert, $\eta_{\tilde{A}}$ und $-\eta_{\tilde{A}}$ sind vollständig dissipativ,
 und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren derart, dass $\lambda - \tilde{A}$ und $\mu + \tilde{A}$ surjektiv auf $C_2(X)$ sind.

3.5 Unbeschränkte Multiplikatoren von X auf $\mathcal{T}(X)$ überführen

Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie man zu einem C_0 -Linksmultiplikator auf einem Operatorraum X einen C_0 -Linksmultiplikator auf der ternären Hülle $\mathcal{T}(X)$ erhält und halten Eigenschaften des hierdurch entstehenden Operators fest. Entsprechende Aussagen beweisen wir auch für unbeschränkte schiefadjungierte Multiplikatoren und für unbeschränkte Multiplikatoren. Außerdem wird bewiesen, unter welchen Voraussetzungen man einen unbeschränkten Multiplikator so auf einen Unteroperatorraum einschränken kann, dass man wieder einen unbeschränkten Multiplikator erhält. Ferner wird gezeigt, dass man unbeschränkte Multiplikatoren auf X als Einschränkungen von regulären Operatoren auf $\mathcal{T}(X)$ auffassen kann.

Es sei an die folgende Definition erinnert:

Definition 3.42. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Ein Unterraum U von $D(A)$ heißt **wesentlicher Bereich** für A , falls U dicht in $D(A)$ bezüglich der Graphennorm

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\| \quad \text{für alle } x \in X$$

liegt.

Der folgende Satz schildert, unter welchen Voraussetzungen man ein $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ auf die ternäre Hülle $\mathcal{T}(X)$ (zur Definition siehe Definitionen-Satz 2.50) überführen kann:

Satz 3.43. *Sei X ein Operatorraum. Sei $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ derart, dass für die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ gilt:*

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : \sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} < \infty. \quad (3.5.1)$$

Dann findet man ein eindeutig bestimmtes $B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ mit der Eigenschaft: $j(D(A)) \subseteq D(B)$ und $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$.

Bevor wir zum Beweis der obigen Satzes kommen, halten wir fest:

Proposition 3.44. *Seien X , A , $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ und B wie in Satz 3.43.*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t)$, also $j(T_t x) = a_t \cdot j(x)$ für alle $x \in X$ (siehe Satz A.9). Definiere $S_t : \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X)$, $z \mapsto a_t \cdot z$, für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die eindeutig bestimmte C_0 -Halbgruppe auf $\mathcal{T}(X)$ mit $S_t \in \mathcal{M}_l(\mathcal{T}(X))$ und $S_t \circ j = j \circ T_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Außerdem wird $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ von B erzeugt.*

(ii) *Es gilt:*

$$\begin{aligned} & B(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(A(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(A)$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in X$.

(iii) *Für jeden Operatorraum Y und $M \subseteq Y$ definiere*

$$\begin{aligned} W_{M,Y} &:= \text{lin}\{j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})\}; \\ &k \in \mathbb{N}_0, x_1 \in M, x_2, \dots, x_{2k+1} \in Y\} \subseteq \mathcal{T}(Y). \end{aligned}$$

Dann ist $W := W_{D(A),X}$ ein wesentlicher Bereich für B , das heißt, $\overline{B|_W} = B$.

Die Bedingung (3.5.1) wird benutzt, um mittels der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) zu zeigen, dass die Halbgruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ stark stetig ist.

Beweis von Satz 3.43 und Proposition 3.44. (i): Mit Lemma 3.6 folgt, dass $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe ist.

Zunächst wird die starke Stetigkeit von $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ gezeigt.

Für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} & \|a_t \cdot j(x) \cdot j(y)^* \cdot j(z) - j(x) \cdot j(y)^* \cdot j(z)\| \\ & \leq \|a_t \cdot j(x) - j(x)\| \cdot \|j(y)^* \cdot j(z)\| \\ & = \|T_t x - x\| \cdot \|j(y)^* \cdot j(z)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3.5. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN VON X AUF $\mathcal{T}(X)$ ÜBERFÜHREN

Analog folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X^{2n+1}$ mit $y := j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2n+1})$: $\|a_t \cdot y - y\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Setze

$$V := \overline{\text{lin}} \left\{ j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2n+1}) ; n \in \mathbb{N}_0, x \in X^{2n+1} \right\}.$$

Dann gilt: $\lim_{t \downarrow 0} S_t z = \lim_{t \downarrow 0} a_t \cdot z = z$ für alle $z \in V$. Nach (2.5.1) ist

$$\mathcal{T}(X) \cong \overline{\text{lin}} \left\{ x_1 \cdot x_2^* \cdot x_3 \cdot x_4^* \cdots x_{2n+1} ; n \in \mathbb{N}_0, x \in j(X)^{2n+1} \right\} \subseteq I(X), \quad (3.5.2)$$

somit liegt V dicht in $\mathcal{T}(X)$. Nach Proposition A.6 hat man: $I_{11}(\mathcal{T}(X)) \cong I_{11}(X)$. Man erhält

$$\|S_t z\|_{\mathcal{T}(X)} = \|a_t \cdot z\|_{\mathcal{T}(X)} \leq \|a_t\|_{I_{11}(\mathcal{T}(X))} \|z\|_{\mathcal{T}(X)} = \|a_t\|_{I_{11}(X)} \|z\|_{\mathcal{T}(X)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z \in \mathcal{T}(X)$, also $\|S_t\| \leq \|a_t\| = \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)}$. Zusammen mit (3.5.1) und der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) folgt, dass $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ stark stetig ist.

Sei B der Erzeuger von $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. Da offensichtlich $S_t \in \mathcal{M}_l(\mathcal{T}(X))$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, ist $B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X))$. Man hat für alle $x \in D(A)$:

$$j(Ax) = j \left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \right) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{a_t \cdot j(x) - j(x)}{t} = B(j(x)).$$

Insbesondere folgt: $j(D(A)) \subseteq D(B)$.

Um zu zeigen, dass $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ durch die aufgeführten Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, geben wir uns eine weitere C_0 -Halbgruppe $(R_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf $\mathcal{T}(X)$ vor mit $R_t \in \mathcal{M}_l(\mathcal{T}(X))$ und $R_t \circ j = j \circ T_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Man findet nach Satz A.10 (Charakterisierung der Linksmultiplikatoren) ein $d_t \in \mathcal{IM}_l(\mathcal{T}(X)) \subseteq I_{11}(\mathcal{T}(X))$ mit $R_t(z) = d_t \cdot z$ für alle $z \in \mathcal{T}(X)$. Nach Proposition A.6 gilt: $I_{11}(\mathcal{T}(X)) \cong I_{11}(X)$. Somit folgt: $d_t \in I_{11}(X)$. Man hat für alle $x \in X$:

$$(a_t - d_t)j(x) = S_t(j(x)) - R_t(j(x)) = j(T_t x) - j(T_t x) = 0.$$

Mit [BLM04], Proposition 4.4.12, oder Proposition A.7 erhält man: $a_t = d_t$, also $S_t = R_t$.

(ii) und (iii): Da $D(A)$ dicht in X liegt und (3.5.2) gilt, ist W dicht in $\mathcal{T}(X)$. Sei $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $x \in D(A)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_s \cdot j(Ax) &= a_s \cdot j \left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \right) \\ &= j \left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_s T_t x - T_s x}{t} \right) = j \left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t(T_s x) - T_s x}{t} \right). \end{aligned}$$

Man erhält $T_s x \in D(A)$, also $a_s \cdot j(x) = j(T_s x) \in j(D(A))$. Hiermit folgt: $S_s(W) \subseteq W$.

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(A)$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} & j(Ax_1) \cdot \underbrace{j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdot j(x_5) \cdots j(x_{2k+1})}_{=: z} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{a_t \cdot j(x_1) - j(x_1)}{t} \cdot z = B(j(x_1) \cdot z). \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Somit ergibt sich: $W \subseteq D(B)$. Nach [EN00], Proposition II.1.7, ist W ein wesentlicher Bereich für B .

Um die Eindeutigkeit von B zu zeigen, geben wir uns ein $C \in \mathcal{M}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ vor mit der Eigenschaft: $j(D(A)) \subseteq D(C)$ und $j \circ A = C \circ j|_{D(A)}$. Dann gilt nach (3.5.3):

$$\begin{aligned} & B(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(A(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \\ &= C(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(A)$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in X$. Also folgt: $B|_W = C|_W$. Da W ein wesentlicher Bereich für B ist, erhält man mit [Wer07], VII.5.35, dass B gleich der Abschließung von $B|_W$ ist, also gleich dem Abschluss des Graphen von $B|_W$, notiert als $\overline{B|_W}$. Somit ergibt sich:

$$B = \overline{B|_W} = \overline{C|_W} = C. \quad \square$$

Im folgenden formulieren wir Versionen der vorherigen zwei Aussagen für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$. Hierbei wird die Bedingung (3.5.1) nicht mehr benötigt, da sie wegen $\|T\|_{\mathcal{M}_l(X)} = \|T\|$ für alle $T \in \mathcal{A}_l(X)$ (Proposition A.14) automatisch erfüllt ist.

Satz 3.45. *Sei X ein Operatorraum und $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$. Dann findet man ein eindeutig bestimmtes $B \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ mit $j(D(A)) \subseteq D(B)$ und $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$.*

Wir notieren zunächst die folgende Proposition und beweisen anschließend den obigen Satz.

Proposition 3.46. *Seien X , A und B wie in Satz 3.45.*

(i) *Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die von A erzeugte C_0 -Gruppe. Setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t) \in \mathcal{IM}_\ell^*(X)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Es gilt:*

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|a_t\| = \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} < \infty.$$

3.5. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN VON X AUF $\mathcal{T}(X)$ ÜBERFÜHREN

Definiere $S_t : \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X), z \mapsto a_t \cdot z$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die eindeutig bestimmte C_0 -Gruppe auf $\mathcal{T}(X)$ mit $S_t \in \mathcal{A}_l(\mathcal{T}(X))$ unitär und $S_t \circ j = j \circ T_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem wird $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von B erzeugt.

(ii) Die Aussagen (ii) und (iii) aus Proposition 3.44 gelten entsprechend.

Beweis von Satz 3.45 und Proposition 3.46. (i): Mit Lemma 3.7 folgt, dass $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Operatorgruppe ist.

Da $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ und $(T_{-t})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ C_0 -Halbgruppen sind, findet man nach der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit: $\sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|T_t\| < \infty$. Es gilt nach Proposition A.14: $\|R\|_{\mathcal{M}_l(X)} = \|R\|$ für alle $R \in \mathcal{A}_l(X)$. Also hat man: $\|a_t\| = \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} = \|T_t\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich:

$$\sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|a_t\| = \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|T_t\| < \infty.$$

Somit folgt (i) analog zum Beweis von Satz 3.43 und Proposition 3.44. Da T_t für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär ist und $\mathcal{IM}_\ell(X)$ und $\mathcal{A}_l(X)$ nach Proposition A.13 als unitale C^* -Algebren isomorph sind, ist a_t unitär und somit auch S_t . Da nach Proposition 3.44 $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. $(S_{-t})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$) eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger B (bzw. $-B$) ist, ist nach Satz B.22 (Satz von Hille-Yosida für Gruppen) B Erzeuger der C_0 -Gruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Die restlichen Aussagen ergeben sich mit Proposition 3.44. \square

Mit Satz 3.45 erhält man:

Satz 3.47. Sei X ein Operatorraum und $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Dann findet man ein eindeutig bestimmtes $B \in \mathcal{A}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ mit $j(D(A)) \subseteq D(B)$ und $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$.

Proposition 3.48. Seien X , A und B wie in Satz 3.47.

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} & B(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(A(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(A)$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in X$.

(ii) Es ist $W := W_{D(A), X}$ ein wesentlicher Bereich für B , dass heißt, $\overline{B|_W} = B$.

Zum Beweis formulieren wir das folgende

Lemma 3.49. *Sei X ein Operatorraum und $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Sei $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass gilt: $\tilde{T} := i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Dann findet man ein eindeutig bestimmtes $C \in \mathcal{A}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ mit den Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} \tilde{C} &:= i \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(C_2(X))), \\ j(D(\tilde{T})) &\subseteq D(\tilde{C}) \quad \text{und} \quad j \circ \tilde{T} = \tilde{C} \circ j|_{D(\tilde{T})}. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 3.45 findet man ein eindeutig bestimmtes Element $\tilde{C} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(C_2(X)))$ mit $j(D(\tilde{T})) \subseteq D(\tilde{C})$ und $j \circ \tilde{T} = \tilde{C} \circ j|_{D(\tilde{T})}$. Nach Proposition 3.46 gilt

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(\tilde{T}(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(\tilde{T})$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in C_2(X)$, und außerdem ist $W := W_{D(\tilde{T}), C_2(X)}$ ein wesentlicher Bereich für \tilde{C} . Es gilt nach [BLM04], 8.3.12.(4): $\mathcal{T}(C_2(X)) \cong C_2(\mathcal{T}(X))$. Somit folgt, dass man Operatoren

$$C_1 : D(C_1) \subseteq \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X) \quad \text{und} \quad C_2 : D(C_2) \subseteq \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X)$$

findet mit $\tilde{C} = i \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\mathcal{T}(X)$ ein Hilbert- C^* -Modul und $-i\tilde{C} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(\mathcal{T}(X)))$, also $C_1 \in \mathcal{A}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ nach Satz 3.21. Mit diesem Satz folgt außerdem: $C_2 = C_1^*$.

Aus der Eindeutigkeit von \tilde{C} folgt die Eindeutigkeit von C_1 . \square

Beweis von Satz 3.47 und Proposition 3.48. Man findet eine Abbildung $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass gilt: $\tilde{A} := i \begin{pmatrix} 0 & A \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Nach Lemma 3.49 gibt es ein eindeutig bestimmtes $B \in \mathcal{A}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \tilde{B} &:= i \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(C_2(X))), \\ j(D(\tilde{A})) &\subseteq D(\tilde{B}) \quad \text{und} \quad j \circ \tilde{A} = \tilde{B} \circ j|_{D(\tilde{A})}. \end{aligned}$$

Es folgt: $j(D(A)) \subseteq D(B)$ und $j(Ax) = B(j(x))$ für alle $x \in D(A)$.

3.5. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN VON X AUF $\mathcal{T}(X)$ ÜBERFÜHREN

Weiter gilt nach Proposition 3.46:

$$\begin{aligned} & \tilde{B}(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(\tilde{A}(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(\tilde{A})$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in C_2(X)$. Hiermit erhält man:

$$\begin{aligned} & B(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(A(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(A)$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in X$.

Da $W_{D(\tilde{A}), C_2(X)}$ nach Proposition 3.46 ein wesentlicher Bereich für \tilde{B} ist, ist $W_{D(A), X}$ ein wesentlicher Bereich für B .

Um die Eindeutigkeit von B zu zeigen, geben wir uns ein $C \in \mathcal{A}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ vor mit $j(D(A)) \subseteq D(C)$ und $j \circ A = C \circ j|_{D(A)}$. Mit (3.5.4) folgt:

$$B|_W = C|_W.$$

Es ist W ein wesentlicher Bereich für B und für C . Weiter ist nach [Wer07], VII.5.35, B gleich der Abschließung von $B|_W$, also gleich dem Abschluss des Graphen von $B|_W$, notiert als $\overline{B|_W}$. Man erhält:

$$B = \overline{B|_W} = \overline{C|_W} = C. \quad \square$$

Sei $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Dann findet man nach Definition 3.14 ein $S : D(S) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass gilt: $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Die Abbildung S ist eindeutig:

Proposition 3.50. *Sei X ein Operatorraum und $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Seien $S_1 : D(S_1) \subseteq X \rightarrow X$ und $S_2 : D(S_2) \subseteq X \rightarrow X$ mit der Eigenschaft, dass $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S_1 & 0 \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} 0 & T \\ S_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$ sind. Dann gilt: $S_1 = S_2$.*

Beweis. Setze $\hat{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & T \\ S_1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & T \\ S_2 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt nach [BLM04], 8.3.12.(4): $\mathcal{T}(C_2(X)) \cong C_2(\mathcal{T}(X))$. Nach Lemma 3.49 findet man $C_1, D_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &:= i \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ C_1^* & 0 \end{pmatrix}, \tilde{D} := i \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ D_1^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(C_2(X))), \\ j(D(\hat{S}_1)) &\subseteq D(\tilde{C}) \quad \text{und} \quad j(D(\hat{S}_2)) \subseteq D(\tilde{D}), \\ j \circ i\hat{S}_1 &= \tilde{C} \circ j|_{D(\hat{S}_1)} \quad \text{und} \quad j \circ i\hat{S}_2 = \tilde{D} \circ j|_{D(\hat{S}_2)}. \end{aligned}$$

Setze $\hat{C} := -i\tilde{C}$ und $\hat{D} := -i\tilde{D}$.

Es gilt nach Proposition 3.46:

$$\begin{aligned} & i\hat{C}(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(i\hat{S}_1(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(\hat{S}_1)$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in C_2(X)$. Mit (3.5.5) erhält man:

$$\begin{aligned} & C_1(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \\ &= j(T(x_1)) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1}) \\ &= D_1(j(x_1) \cdot j(x_2)^* \cdot j(x_3) \cdot j(x_4)^* \cdots j(x_{2k+1})) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in D(T)$ und $x_2, \dots, x_{2k+1} \in X$.

Es folgt:

$$C_1|_{W_{D(T),X}} = D_1|_{W_{D(T),X}}.$$

Da $W_{D(\hat{S}_1),C_2(X)}$ (bzw. $W_{D(\hat{S}_2),C_2(X)}$) nach Proposition 3.46 ein wesentlicher Bereich für \hat{C} (bzw. \hat{D}) ist, ist $W := W_{D(T),X}$ ein wesentlicher Bereich für C_1 und für D_1 . Weiter ist nach [Wer07], VII.5.35, C_1 gleich der Abschließung $\overline{C_1|_W}$ von $C_1|_W$. Hiermit erhält man:

$$C_1 = \overline{C_1|_W} = \overline{D_1|_W} = D_1.$$

Damit folgt $C_2 = C_1^* = D_1^* = D_2$, also $\hat{C} = \hat{D}$.

Sei $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ (bzw. $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$) die von $i\hat{S}_1$ (bzw. $i\hat{S}_2$) erzeugte C_0 -Gruppe auf $C_2(X)$ und $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die von $i\hat{C} = i\hat{D}$ erzeugte C_0 -Gruppe auf $\mathcal{T}(C_2(X))$. Setze $a_t := \Theta^{-1}(U_t)$ und $b_t := \Theta^{-1}(V_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es ergibt sich mit Proposition 3.46:

$$a_t \cdot j(x) = j(U_t x) = S_t(j(x)) = j(V_t x) = b_t \cdot j(x)$$

für alle $x \in X$. Mit [BLM04], Proposition 4.4.12, oder Proposition A.7 folgt: $a_t = b_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Man erhält $\hat{S}_1 = \hat{S}_2$, also $S_1 = S_2$. \square

Nach der obigen Proposition ist die Abbildung S_1 eindeutig. Ist X ein Hilbert- C^* -Modul, so gilt: $S_1 = T^*$ (Satz 3.21). Daher kann man S_1 als die Adjungierte von T ansehen und die entsprechende Bezeichnung einführen:

Definition 3.51. Sei X ein Operatorraum und $T \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Dann findet man einen eindeutig bestimmten Operator $T^* : D(T^*) \subseteq X \rightarrow X$, genannt

Adjungierte von T , derart, dass gilt: $i \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$.

3.5. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN VON X AUF $\mathcal{T}(X)$ ÜBERFÜHREN

Die obige Bezeichnung T^* führt nicht zu Bezeichnungskollisionen:

Proposition 3.52. *Sei X ein Operatorraum und $T \in \mathcal{A}_l(X)$. Es gilt nach Proposition 3.17: $\mathcal{A}_l(X) \subseteq \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Dann stimmt T^* aus der obigen Definition mit T^* , der Linksadjungierten in $\mathcal{A}_l(X)$ (siehe S. 104), überein.*

Beweis. Mit T^* sei die Adjungierte aus der obigen Definition bezeichnet und mit T^* die Linksadjungierte in $\mathcal{A}_l(X)$. Mit Lemma 3.18 erhält man, dass $\tilde{T} := i \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_l(C_2(X))$ schiefadjungiert ist. Nach Proposition 3.5 gilt: $\tilde{T} \in \mathcal{A}_l(C_2(X)) \subseteq \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Mit der Eindeutigkeitsaussage aus Proposition 3.50 ergibt sich: $T^* = T^*$. \square

Wir haben gezeigt, wie man unbeschränkte Multiplikatoren von X auf die ternäre Hülle $\mathcal{T}(X)$, also auf einen größeren Operatorraum, überführen kann. Im folgenden untersuchen wir, unter welchen Voraussetzungen ein unbeschränkter Multiplikator so auf einen Unteroperatorraum eingeschränkt werden kann, dass man wieder einen unbeschränkten Multiplikator erhält.

Proposition 3.53. *Seien X, Y Operatorräume mit $X \subseteq Y$. Ferner sei $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(Y)$ (bzw. $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(Y)$) derart, dass die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe (bzw. C_0 -Gruppe) X invariant lässt. Dann folgt: $A|_X \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ (bzw. $A|_X \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$).*

Beweis. (i): Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die von $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(Y)$ erzeugte C_0 -Halbgruppe. Nach [EN00], Corollary II.2.3, erzeugt $A|_X$ die C_0 -Halbgruppe $(T_t|_X)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. Betrachte $j = j_Y : Y \rightarrow I(Y) \subseteq I(\mathcal{S}(Y))$. Dann ist $\sigma := j_Y|_X$ eine vollständige Isometrie in die C^* -Algebra $I(\mathcal{S}(Y))$. Sei $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t) \in I_{11}(Y) \subseteq I(\mathcal{S}(Y))$, also $j_Y(T_t x) = a_t \cdot j_Y(x)$ für alle $x \in X$. Es gilt:

$$\sigma(T_t|_X(x)) = j_Y(T_t x) = a_t \cdot j_Y(x) = a_t \cdot \sigma(x) \quad (3.5.6)$$

für alle $x \in X$. Somit folgt: $T_t|_X \in \mathcal{M}_l(X)$.

(ii): Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die von $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(Y)$ erzeugte C_0 -Gruppe von unitären Elementen aus $\mathcal{A}_l(Y)$. Analog zu (i) ergibt sich, dass $A|_X$ die C_0 -Gruppe $(T_t|_X)_{t \in \mathbb{R}}$ erzeugt. Sei $t \in \mathbb{R}$. Setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t)$. Da T_t unitär ist, gilt: $T_t^* = T_{-t}$. Somit folgt:

$$a_t^* \cdot \sigma(x) = j_Y(T_t^* x) = j_Y(T_{-t} x) \in \sigma(X)$$

für alle $x \in X$. Mit (3.5.6) und [Zar01], Proposition 1.7.7, erhält man: $T_t|_X \in \mathcal{A}_l(X)$. Da a_t unitär ist und $e_{I_{11}(Y)} \cdot j_Y(x) = j_Y(x)$ für alle $x \in X$ gilt (siehe (A.1.1)), ist auch $T_t|_X$ unitär. Insgesamt folgt: $A|_X \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$. \square

Mit der obigen Proposition erhält man ein entsprechendes Resultat für die unbeschränkten Multiplikatoren:

Proposition 3.54. *Seien X, Y Operatorräume mit $X \subseteq Y$. Weiter sei $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(Y)$ derart, dass die von $i \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte C_0 -Gruppe $C_2(X)$ invariant lässt. Dann folgt: $A|_X \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.*

In den beiden vorherigen Resultaten wurde gefordert, dass die erzeugte C_0 -Halbgruppe den Unterraum X invariant lässt. Auf diese Forderung kann man verzichten, wenn man zusätzliche Voraussetzungen an den Erzeuger stellt:

Proposition 3.55. *Seien X, Y Operatorräume mit $X \subseteq Y$. Ferner sei $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(Y)$ derart, dass die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ erfüllt: $\|T_t\|_{\mathcal{M}_l(Y)} \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Es existiere ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\lambda - A|_X$ surjektiv auf X ist. Dann gilt $A|_X \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$, und $A|_X$ erzeugt die C_0 -Halbgruppe $(T_t|_X)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$.*

Beweis. Nach dem Charakterisierungssatz von $\mathcal{M}_l^{C_0}(Y)$ mittels η_A (Satz 3.26) erzeugt η_A eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe auf $C_2(Y)$. Definiere

$$A|_X := \{(x, y); x \in D(A) \cap X, y = Ax \in X\}.$$

Es sind η_A und damit auch $\eta_{A|_X}$ nach dem Satz von Lumer-Phillips in Operatorräumen (Satz 3.38) vollständig dissipativ. Da $\lambda - \eta_{A|_X}$ surjektiv auf $C_2(X)$ ist, folgt mit Satz 3.38, dass $\eta_{A|_X}$ eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe erzeugt. Es ergibt sich mit Satz 3.26: $A|_X \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$.

Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe. Weil die von $A|_X$ erzeugte C_0 -Halbgruppe mit $(T_t|_X)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ übereinstimmt, erhält man mit [EN00], Corollary II.2.3: $A|_X = A|_X$. \square

Eine entsprechende Version der obigen Proposition für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ beweist man analog und erhält:

Proposition 3.56. *Seien X, Y Operatorräume mit $X \subseteq Y$. Weiter sei $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(Y)$. Es gelte: Es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\lambda - A|_X$ und $\mu + A|_X$ surjektiv auf X sind. Dann gilt: $A|_X \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.*

Mit der obigen Aussage ergibt sich:

Proposition 3.57. *Seien X, Y Operatorräume mit $X \subseteq Y$. Ferner sei $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(Y)$. Setze $\tilde{A} := i \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$. Es gelte: Es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ so,*

3.5. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN VON X AUF $\mathcal{T}(X)$ ÜBERFÜHREN

dass $\lambda - \tilde{A}|_{C_2(X)}$ und $\mu + \tilde{A}|_{C_2(X)}$ surjektiv auf $C_2(X)$ sind. Dann gilt: $A|_X \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.

Man kann jeden unbeschränkten schiefadjungierten Multiplikator als Einschränkung eines geeigneten regulären Operators auffassen:

Satz 3.58. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.
- (b) *Es existiert ein $B \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ schiefadjungiert mit den Eigenschaften:*
 - (i) $j(D(A)) \subseteq D(B)$,
 - (ii) $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$ und
 - (iii) *es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\lambda - B|_{j(X)}$ und $\mu + B|_{j(X)}$ surjektiv auf $j(X)$ sind.*

Im obigen Satz kann man Punkt (iii) unter (b) auch durch eine der folgenden beiden Bedingungen ersetzen:

- (iii)' *Es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\lambda - A$ und $\mu + A$ surjektiv auf X sind.*
- (iii)'' *Die von B erzeugte C_0 -Gruppe lässt $j(X)$ invariant.*

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“: Es gelte (a). Man findet nach Satz 3.45 einen Operator $B \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ mit $j(D(A)) \subseteq D(B)$ und $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$. Mit Satz 3.9 erhält man: $B \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ mit $B^* = -B$.

Nach Proposition A.14 gilt: $\|T\|_{\mathcal{M}(X)} = \|T\|$ für alle $T \in \mathcal{A}_l(X)$. Da A Erzeuger einer C_0 -Gruppe von unitären Elementen von $\mathcal{A}_l(X)$ ist, folgt somit, dass A Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Gruppe ist. Da A und $-A$ jeweils Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Halbgruppe sind, findet man nach dem Satz von Lumer-Phillips (Satz B.20) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $\lambda - A$ und $\mu + A$ surjektiv auf X sind. Somit ergibt sich Punkt (iii) von (b).

„(b) \Rightarrow (a)“: Es gelte (b). Mit Satz 3.9 erhält man: $B \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(X))$. Da $\lambda - B|_{j(X)}$ und $\mu + B|_{j(X)}$ surjektiv auf $j(X)$ sind, ergibt sich mit Proposition 3.56: $B|_{j(X)} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(j(X))$. Es folgt: $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$. \square

Analog zum obigen Satz beweist man ein Analogon für $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$:

Satz 3.59. *Sei X ein Operatorraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.
- (b) *Es existiert ein $B \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ mit den Eigenschaften:*
 - (i) $j(D(A)) \subseteq D(B)$,
 - (ii) $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$ und
 - (iii) *es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $\lambda - i \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}|_{j_{2,1}(C_2(X))}$ und $\mu + i \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}|_{j_{2,1}(C_2(X))}$ surjektiv auf $j_{2,1}(C_2(X))$ sind.*

Im obigen Satz kann man Punkt (iii) unter (b) auch durch eine der folgenden beiden Bedingungen ersetzen:

- (iii)' *Es existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $C : D(C) \subseteq X \rightarrow X$ so, dass $\lambda - i \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$ und $\mu + i \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$ surjektiv auf $C_2(X)$ sind.*
- (iii)'' *Die von $i \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte C_0 -Gruppe lässt $j_{2,1}(C_2(X))$ invariant.*

Mit Hilfe von Proposition 3.56 zeigt man, dass die Adjungierte eines Elementes aus $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

Proposition 3.60. *Sei X ein Operatorraum und $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$. Dann gilt: $A^* \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ und $(A^*)^* = A$.*

Beweis. Es gilt: $\tilde{A} := i \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Nach Lemma 3.49 findet man ein $C \in \mathcal{A}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X)) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$ mit:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &:= i \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(C_2(X))), \\ j(D(\tilde{A})) &\subseteq D(\tilde{C}) \quad \text{und} \quad j \circ \tilde{A} = \tilde{C} \circ j|_{D(\tilde{A})}. \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Weiter hat man nach [Lan95], Corollary 9.6: $C^* \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$. Da nach [Lan95], Corollary 9.4, oder Proposition 1.14 gilt $C^{**} = C$, erhält man mit Proposition 1.35, dass $\tilde{B} := i \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X) \oplus \mathcal{T}(X))$ schiefadjungiert ist. Mit Proposition 2.14 ergibt sich: $\mathcal{T}(X) \oplus \mathcal{T}(X) \cong C_2(\mathcal{T}(X))$. Es folgt mit Satz 3.9: $\tilde{B} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(\mathcal{T}(X)))$.

Nach Proposition 3.40 findet man $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\lambda - \tilde{A}$ und $\mu + \tilde{A}$ surjektiv auf $C_2(X)$ sind. Setze $Y := j_{2,1}(C_2(X))$. Somit sind $\lambda - \tilde{C}|_Y$ und

3.6. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN AUF EINEN HILBERTRAUM ÜBERFÜHREN

$\mu + \tilde{C}|_Y$ nach (3.5.7) surjektiv auf Y , also auch $\lambda - \tilde{B}|_Y$ und $\mu + \tilde{B}|_Y$. Mit Proposition 3.56 erhält man $\tilde{B}|_Y \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(Y)$, also $i \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Es folgt: $A^* \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ und $(A^*)^* = A$. \square

3.6 Unbeschränkte Multiplikatoren auf einen Hilbertraum überführen

In diesem Abschnitt beweisen wir, wie man für einen beliebigen Operatorraum X Elemente aus $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ (bzw. $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$) und die von ihnen erzeugte C_0 -Halbgruppen (bzw. C_0 -Gruppen) auf einen Hilbertraum H überführen kann. Dies ermöglicht es, eine Charakterisierung der Elemente von $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$, $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ und $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ zu zeigen.

Das folgende Beispiel dient der Motivation und legt dar, wie man eine bestimmte Art von C_0 -Halbgruppen, sogenannte Multiplikationshalbgruppen, von dem Operatorraum $C_0(\Omega)$ auf den Hilbertraum $\ell^2(\Omega)$ überführen kann:

Beispiel 3.61. Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorffraum und $f \in C(\Omega)$ mit $\sup_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re} f(\omega) < \infty$. Setze $X := C_0(\Omega)$, $H := \ell^2(\Omega)$, $T_t : X \rightarrow X, g \mapsto e^{tf} \cdot g$ und $S_t : H \rightarrow H, h \mapsto e^{tf} \cdot h$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt:

(i) $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$) ist eine C_0 -Halbgruppe auf X (bzw. H), die sogenannte **Multiplikationshalbgruppe**, mit Erzeuger

$$\begin{aligned} M_f : D(M_f) \subseteq X &\rightarrow X, g \mapsto fg \\ (\text{bzw. } \tilde{M}_f : D(\tilde{M}_f) \subseteq H &\rightarrow H, h \mapsto fh). \end{aligned}$$

(ii) $\sigma : X \rightarrow L(H), g \mapsto (h \mapsto gh)$, ist eine nicht-ausgeartete $*$ -Darstellung von X mit der Eigenschaft, dass $[\sigma(D(M_f))H]$ dicht in H liegt.

(iii) $\sigma(M_f(g)) = \tilde{M}_f \circ (\sigma(g))$ für alle $g \in D(M_f)$.

Beweis. (i) folgt mit [EN00], Lemma II.2.9.

(ii) und (iii) rechnet man leicht nach. \square

Im folgenden Lemma halten wir eine speziell an $\mathcal{T}(X)$ angepasste Einbettung fest, die in den darauffolgenden Sätzen verwendet wird:

Lemma 3.62. *Sei X ein Operatorraum. Dann findet man einen Hilbertraum K , eine unitale, injektive $*$ -Darstellung $\pi : I(\mathcal{S}(X)) \rightarrow L(K)$ und abgeschlossene Unterräume K_1, K_2 von K derart, dass gilt:*

- (i) $[\pi(\mathcal{T}(X))K_1]$ liegt dicht in K_2 ,
- (ii) $[\pi(\mathcal{T}(X))K_1^\perp] = \{0\}$ und
- (iii) $[\pi(j(X))K] \subseteq K_2$.

Eine solches Quadrupel (π, K, K_1, K_2) wird $\mathcal{T}(X)$ -**Einbettung** von X genannt.

Beweis. Man findet einen Hilbertraum K und eine unitale, injektive $*$ -Darstellung $\pi : I(\mathcal{S}(X)) \rightarrow L(K)$. Nach Proposition 2.45 (nicht-ausgeartete Einbettung eines TRO) findet man abgeschlossene Unterräume K_1, K_2 von K so, dass $[\pi(\mathcal{T}(X))K_1]$ dicht in K_2 liegt und $[\pi(\mathcal{T}(X))K_1^\perp] = \{0\}$ gilt. Wegen $[\pi(\mathcal{T}(X))K_1^\perp] = \{0\}$ gilt: $[\pi(\mathcal{T}(X))K] = [\pi(\mathcal{T}(X))K_1] \subseteq K_2$. \square

Satz 3.63. *Sei X ein Operatorraum und (π, K, K_1, K_2) eine $\mathcal{T}(X)$ -Einbettung von X . Sei $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ derart, dass für die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ gilt:*

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : \sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} < \infty. \quad (3.6.1)$$

Sei $B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ mit der Eigenschaft: $j(D(A)) \subseteq D(B)$ und $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$. Setze $b_t := \pi(\Theta^{-1}(T_t))|_{K_2}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf K_2 . Sei C der Erzeuger von $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. Es gilt:

- (i) $[\pi(D(B))K_1] \subseteq D(C)$,
- (ii) $\pi(B(z))(\xi) = C(\pi(z)(\xi))$ für alle $z \in D(B)$ und $\xi \in K_1$,
- (iii) $\lim_{t \downarrow 0} b_t \circ y = y$ für alle $y \in \pi(j(X))$,
- (iv) $b_t \circ \pi(j(x)) \in \pi(j(X))$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in X$.

Beweis. Setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t)$ und $c_t := \pi(a_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $[\pi(\mathcal{T}(X))K_1]$ dicht in K_2 ist und $c_t \cdot [\pi(\mathcal{T}(X))K_1] \subseteq K_2$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, ist $c_t(K_2) \subseteq K_2$, also auch $b_t(K_2) \subseteq K_2$. Mit Lemma 3.6 folgt, dass $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Operatorhalbgruppe auf K_2 ist. Mit $[\pi(\mathcal{T}(X))K] \subseteq K_2$ erhält man:

$$c_t \pi(z) = b_t \pi(z) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } z \in \mathcal{T}(X). \quad (3.6.2)$$

3.6. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN AUF EINEN HILBERTRAUM ÜBERFÜHREN

Definiere $S_t : \mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(X), z \mapsto a_t \cdot z$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ nach Proposition 3.44 eine C_0 -Halbgruppe auf $\mathcal{T}(X)$ ist, ergibt sich mit (3.6.2) für alle $z \in \mathcal{T}(X)$ und $\xi \in K_1$:

$$\begin{aligned} \|b_t(\pi(z)(\xi)) - \pi(z)(\xi)\| &= \|(c_t \pi(z) - \pi(z))(\xi)\| \\ &= \|\pi(a_t \cdot z - z)(\xi)\| \leq \|a_t \cdot z - z\| \|\xi\| \\ &= \|S_t z - z\| \|\xi\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \downarrow 0. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Des weiteren hat man für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $\|b_t\| \leq \|c_t\| = \|a_t\|$. Mit (3.6.1) und Proposition B.3 (Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen) erhält man, dass $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf K_2 ist.

(i) und (ii): Es gilt mit (3.6.3) für alle $z \in D(B)$ und $\xi \in K_1$:

$$\begin{aligned} \pi(B(z))(\xi) &= \pi\left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{a_t \cdot z - z}{t}\right)(\xi) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{b_t(\pi(z)(\xi)) - \pi(z)(\xi)}{t} = C(\pi(z)(\xi)). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt: $[\pi(D(B))K_1] \subseteq D(C)$.

(iii): Da $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ stark stetig ist, gilt für alle $x \in X$:

$$\|b_t \pi(j(x)) - \pi(j(x))\| = \|a_t \cdot j(x) - j(x)\| = \|j(T_t x) - j(x)\| \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow 0$.

(iv): Mit (3.6.2) ergibt sich für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $x \in X$:

$$b_t \pi(j(x)) = c_t \pi(j(x)) = \pi(a_t \cdot j(x)) \in \pi(j(X)). \quad \square$$

Ein Analogon von Satz 3.63 für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ lautet:

Satz 3.64. *Sei X ein Operatorraum und (π, K, K_1, K_2) eine $\mathcal{T}(X)$ -Einbettung von X . Sei $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die von A erzeugte C_0 -Gruppe. Dann findet man ein eindeutig bestimmtes $B \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ mit der Eigenschaft: $j(D(A)) \subseteq D(B)$ und $j \circ A = B \circ j|_{D(A)}$. Setze $b_t := \pi(\Theta^{-1}(T_t))|_{K_2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Dann ist $(b_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe von unitären Elementen aus $L(K_2)$. Sei C der Erzeuger von $(b_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Es gilt:

- (i) $[\pi(D(B))K_1] \subseteq D(C)$,
- (ii) $\pi(B(z))(\xi) = C(\pi(z)(\xi))$ für alle $z \in D(B)$ und $\xi \in K_1$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} b_t \circ y = y$ für alle $y \in \pi(j(X))$,

(iv) $b_t \circ \pi(j(x)), b_t^* \circ \pi(j(x)) \in \pi(j(X))$ für alle $x \in X$ und $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t)$ und $c_t := \pi(a_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Analog zum Beweis von Satz 3.63 folgt mit Satz B.22 (Satz von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen), dass $(b_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf K_2 ist. Nach Lemma 3.7 ist $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe von unitären Elementen aus $\mathcal{IM}_\ell^*(X)$. Für alle $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathcal{T}(X)$ und $\xi \in K_1$ gilt

$$b_t^* b_t(\pi(z)(\xi)) = c_t^* c_t(\pi(z)(\xi)) = \pi(a_t^* \cdot a_t \cdot z)(\xi) = \pi(z)(\xi) = b_t b_t^*(\pi(z)(\xi)),$$

somit folgt: b_t ist unitär. Die restlichen Aussagen erhält man mit Satz 3.63. \square

Mit Hilfe von Satz 3.63 kann man die Elemente von $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ charakterisieren:

Satz 3.65 (Charakterisierungssatz für $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$). *Sei X ein Operatorraum und (π, K, K_1, K_2) eine $\mathcal{T}(X)$ -Einbettung von X . Setze $\sigma := \pi \circ j : X \rightarrow L(K)$. Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$, und für die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ gilt:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : \sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} < \infty. \quad (3.6.4)$$

(b) Man findet eine C_0 -Halbgruppe $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf K_2 derart, dass gilt:

- (i) $\sigma(Ax) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{b_t \sigma(x) - \sigma(x)}{t}$ für alle $x \in D(A)$,
- (ii) $\lim_{t \downarrow 0} b_t \circ y = y$ für alle $y \in \sigma(X)$,
- (iii) $b_t \circ y \in \sigma(X)$ für alle $y \in \sigma(X)$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$,
- (iv) A ist dicht definiert mit $\rho(A) \neq \emptyset$.

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“: Es gelte (a). Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ setze $a_t := \Theta^{-1}(T_t)$, also $j(T_t x) = a_t \cdot j(x)$ für alle $x \in X$, und $b_t := \pi(a_t)|_{K_2}$. Nach Satz 3.63 ist $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf K_2 .

(ii) und (iii) folgen mit Satz 3.63.

(iv) folgt mit dem Satz von Hille-Yosida, allgemeiner Fall (Satz B.14).

(i): Man hat für alle $x \in D(A)$:

$$\sigma(Ax) = \sigma \left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \right) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\pi(a_t) \sigma(x) - \sigma(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{b_t \sigma(x) - \sigma(x)}{t}.$$

3.6. UNBESCHRÄNKTE MULTIPLIKATOREN AUF EINEN HILBERTRAUM ÜBERFÜHREN

„(b) \Rightarrow (a)“: Es gelte (b). Definiere $c_t : K \rightarrow K, \xi \mapsto b_t(p_{K_2}(\xi))$, wobei mit p_{K_2} die Projektion von K auf K_2 bezeichnet werde. Man erhält:

$$c_t \sigma(x) = b_t \sigma(x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (3.6.5)$$

Setze $Y := \sigma(X)$. Sei

$$S_t := L_{c_t} : Y \rightarrow Y, y \mapsto c_t y \quad \text{und} \quad T_t := \sigma^{-1} \circ S_t \circ \sigma : X \rightarrow X$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach (iii) gilt $S_t \in \mathcal{M}_l(Y)$ und $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und es ergibt sich:

$$\|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} = \|S_t\|_{\mathcal{M}_l(Y)} \leq \|c_t\| = \|b_t\|. \quad (3.6.6)$$

Da $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe ist, findet man nach der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft: $\sup_{t \in [0, \delta]} \|b_t\| < \infty$. Mit (3.6.6) erhält man:

$$\sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} \leq \sup_{t \in [0, \delta]} \|b_t\| < \infty.$$

Weiter gilt nach (3.6.5) und (ii):

$$\begin{aligned} \|T_t x - x\| &= \|c_t \sigma(x) - \sigma(x)\| \\ &= \|b_t \sigma(x) - \sigma(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X . Sei \tilde{A} der Erzeuger dieser Halbgruppe. Mit (3.6.5) folgt für alle $x \in D(\tilde{A})$:

$$\sigma(\tilde{A}x) = \sigma\left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}\right) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{c_t \sigma(x) - \sigma(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{b_t \sigma(x) - \sigma(x)}{t}.$$

Da \tilde{A} der Erzeuger von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist und (i) gilt, erhält man $A \subseteq \tilde{A}$. Wegen (iv) ergibt sich mit Lemma B.15: $A = \tilde{A}$. \square

Eine entsprechende Version von Satz 3.65 für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ ist der folgende

Satz 3.66 (Charakterisierungssatz für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$). *Sei X ein Operatorraum und (π, K, K_1, K_2) eine $\mathcal{T}(X)$ -Einbettung von X . Setze $\sigma := \pi \circ j : X \rightarrow L(K)$. Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$, d. h. A ist Erzeuger einer C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf X mit $T_t \in \mathcal{A}_l(X)$ unitär für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Man findet eine C_0 -Gruppe $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ von unitären Elementen aus $L(K_2)$ derart, dass gilt:

- (i) $\sigma(Ax) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b_t \sigma(x) - \sigma(x)}{t}$ für alle $x \in D(A)$,
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} b_t \circ y = y$ für alle $y \in \sigma(X)$,
- (iii) $b_t \circ y, b_t^* \circ y \in \sigma(X)$ für alle $y \in \sigma(X)$ und $t \in \mathbb{R}$,
- (iv) A ist dicht definiert mit $\rho(A) \neq \emptyset$.

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“: Es gelte (a). Mit Proposition 3.46 folgt:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : \sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} < \infty.$$

Analog zum Beweis von Satz 3.65 folgen (i) bis (iv), wobei $(b_t)_{t \in \mathbb{R}}$ nach Satz 3.64 eine C_0 -Gruppe von unitären Elementen ist.

„(b) \Rightarrow (a)“: Es gelte (b). Man erhält analog zum Beweis von Satz 3.65, dass A Erzeuger einer C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf X mit $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Mit (iii) folgt: $T_t \in \mathcal{A}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ gilt

$$\sigma(T_t^* T_t x) = b_t^* b_t \sigma(x) = \sigma(x) = \sigma(T_t T_t^* x),$$

also ist T_t unitär. □

Mit dem obigen Satz erhält man:

Satz 3.67 (Charakterisierungssatz für $\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$). *Sei X ein Operatorraum und (π, K, K_1, K_2) eine $\mathcal{T}(C_2(X))$ -Einbettung von $C_2(X)$. Sei $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.

(b) Man findet eine Abbildung $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ und eine C_0 -Gruppe $(b_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ von unitären Elementen aus K_2 derart, dass gilt:

- (i) $\sigma(\tilde{A}x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b_t \sigma(x) - \sigma(x)}{t}$ für alle $x \in D(\tilde{A})$, wobei $\tilde{A} := i \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ ist,
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} b_t \circ y = y$ für alle $y \in \sigma(C_2(X))$,
- (iii) $b_t \circ y, b_t^* \circ y \in \sigma(C_2(X))$ für alle $y \in \sigma(C_2(X))$ und $t \in \mathbb{R}$,
- (iv) \tilde{A} ist dicht definiert mit $\rho(\tilde{A}) \neq \emptyset$.

3.7 Die strikte X -Topologie auf $L(H)$

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie man eine C_0 -Halbgruppe von einem Operatorraum auf einen Hilbertraum überführen kann. In diesem Abschnitt wird eine C_0 -Halbgruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ von einem Hilbertraum H auf einen Operatorraum $X \subseteq L(H)$ übertragen. Dafür genügt es nicht, von $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die starke Stetigkeit auf H zu verlangen, man benötigt

$$\lim_{t \downarrow 0} S_t \circ x = x \quad \text{für alle } x \in X,$$

wie man in Satz 3.63.(iii) sieht. Um dies abstrakter zu fassen, wird die sogenannte strikte X -Topologie eingeführt. Des weiteren untersuchen wir, welche Eigenschaften diese Topologie besitzt, insbesondere Zusammenhänge zur Normtopologie und zur starken Topologie.

Definition 3.68. Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum. Für alle $x \in X$ definiere die Halbnorm

$$p_x : L(H) \rightarrow \mathbb{R}, T \mapsto \|T \circ x\|.$$

Die von $(p_x)_{x \in X}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $L(H)$ wird **strikte X -Topologie** genannt.

In den folgenden beiden Propositionen werden Eigenschaften der strikten X -Topologie beleuchtet.

Proposition 3.69. Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum.

- (i) Die strikte X -Topologie auf $L(H)$ ist gröber als die Normtopologie.
- (ii) Ist X unital, so gilt in (i) Gleichheit.
- (iii) Die strikte X -Topologie ist genau dann hausdorffsch, wenn gilt:

$$\forall T \in L(H) \setminus \{0\} \exists x \in X : \|T \circ x\| \neq 0.$$

- (iv) Ist $[XH]$ dicht in H , so ist die strikte X -Topologie hausdorffsch.

Beweis. (i): Sei $(\xi_\lambda)_\lambda$ ein Netz in $L(H)$, welches gegen ein $\xi_0 \in L(H)$ konvergiert. Dann gilt für alle $x \in X$:

$$\|\xi_\lambda \circ x - \xi_0 \circ x\| \leq \|\xi_\lambda - \xi_0\| \|x\| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

(ii) folgt unmittelbar.

(iii) erhält man mit [Wer07], Lemma VIII.1.4.

(iv): Sei $[XH]$ dicht in H und $T \in L(H) \setminus \{0\}$. Dann findet man ein $\xi_0 \in H$ mit $T\xi_0 \neq 0$. Setze $\varepsilon := \|T\xi_0\|$. Da T stetig ist, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass gilt:

$$\forall \eta \in H : \|\eta - \xi_0\| < \delta \Rightarrow \|T\eta - T\xi_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $\eta \in B_H(\xi_0, \delta) =: M$. Es folgt

$$\frac{\varepsilon}{2} > \|T\eta - T\xi_0\| \geq |\|T\eta\| - \varepsilon|,$$

also $\|T\eta\| \neq 0$.

Da $[XH]$ dicht in H liegt, ist $M \cap [XH] \neq \emptyset$. Somit findet man $n \in \mathbb{N}$, $x \in X^n$ und $\xi \in H^n$ mit $\sum_{i=1}^n x_i(\xi_i) \in M \cap [XH]$. Es gilt: $0 \neq T(\sum_{i=1}^n x_i(\xi_i)) = \sum_{i=1}^n T(x_i(\xi_i))$. Daher gibt es ein $j \in \underline{n}$ mit $T(x_j(\xi_j)) \neq 0$. Mit (iii) folgt die Behauptung. \square

Proposition 3.70. *Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum.*

- (i) *Ist $[XH] = H$, so ist die strikte X -Topologie auf $L(H)$ feiner als die starke Topologie.*
- (ii) *Sei $[XH]$ dicht in H . Sei $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein beschränktes Netz in $L(H)$ und $T_0 \in L(H)$. Falls $T_\lambda \rightarrow T_0$ in der strikten X -Topologie, dann folgt: $T_\lambda \rightarrow T_0$ stark.*

Beweis. (i): Es gelte $[XH] = H$. Sei $(T_\lambda)_\lambda$ ein Netz in $L(H)$, welches in der strikten X -Topologie gegen ein $T_0 \in L(H)$ konvergiert. Sei $\xi \in H$. Dann findet man $n \in \mathbb{N}$, $x \in X^n$ und $\eta \in H^n$ mit $\xi = \sum_{i=1}^n x_i(\eta_i)$. Somit folgt:

$$\|T_\lambda(\xi) - T_0(\xi)\| \leq \sum_{i=1}^n \|T_\lambda \circ x_i - T_0 \circ x_i\| \|\eta_i\| \xrightarrow{\lambda} 0.$$

(ii): Es gelte: $T_\lambda \rightarrow T_0$ in der strikten X -Topologie. Sei $\xi \in H$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Setze $M := \sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| + 1$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, $x \in X^n$ und $\eta \in H^n$ mit $\|\xi - \sum_{i=1}^n x_i(\eta_i)\| < \frac{\varepsilon}{2(M+\|T_0\|)}$. Weiter findet man ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit der Eigenschaft:

$$\forall \lambda > \lambda_0 \quad \forall i \in \underline{n} : \|T_\lambda \circ x_i - T_0 \circ x_i\| < \frac{\varepsilon}{2n\|\eta_i\| + 1}.$$

Für alle $\lambda > \lambda_0$ gilt:

$$\begin{aligned} & \|T_\lambda(\xi) - T_0(\xi)\| \\ & \leq (\|T_\lambda\| + \|T_0\|) \left\| \xi - \sum_{i=1}^n x_i(\eta_i) \right\| + \sum_{i=1}^n \|T_\lambda(x_i(\eta_i)) - T_0(x_i(\eta_i))\| \\ & \leq (M + \|T_0\|) \left\| \xi - \sum_{i=1}^n x_i(\eta_i) \right\| + \sum_{i=1}^n \|T_\lambda \circ x_i - T_0 \circ x_i\| \|\eta_i\| < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

3.7. DIE STRIKTE X -TOPOLOGIE AUF $L(H)$

Mit Lemma 3.12 erhält man:

Beispiel 3.71. Sei H ein Hilbertraum. Sei $T_0 \in L(H)$ und $(T_\lambda)_\lambda$ ein gleichmäßig beschränktes Netz in $L(H)$ mit $T_\lambda \rightarrow T_0$ stark. Dann gilt: $T_\lambda \rightarrow T_0$ in der strikten $\mathcal{K}(H)$ -Topologie.

Im folgenden wird für einen beliebigen Operatorraum $X \subseteq L(H)$ eine C_0 -Halbgruppe von H auf X überführt:

Proposition 3.72. Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum. Sei $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf H mit Erzeuger C und den Eigenschaften:

- (i) $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ konvergiert in der strikten X -Topologie gegen id_H für $t \rightarrow 0$,
- (ii) $S_t \circ x \in X$ für alle $t \in \mathbb{R}_{> 0}$ und $x \in X$.

Definiere $T_t := L_{S_t} : X \rightarrow X, x \mapsto S_t \circ x$, für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X mit $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und der Eigenschaft:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_{> 0} : \sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} < \infty.$$

Sei A der zugehörige Erzeuger. Dann gilt $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$, $[D(A)H] \subseteq D(C)$ und

$$A(x)(\xi) = C(x(\xi)) \quad \text{für alle } x \in D(A) \text{ und } \xi \in H.$$

Beweis. Offensichtlich ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X mit $T_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe ist, findet man nach der Charakterisierung der starken Stetigkeit von Halbgruppen (Proposition B.3) ein $\delta \in \mathbb{R}_{> 0}$ mit: $\sup_{t \in [0, \delta]} \|S_t\| < \infty$. Damit folgt:

$$\sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\|_{\mathcal{M}_l(X)} \leq \sup_{t \in [0, \delta]} \|S_t\| < \infty.$$

Für alle $x \in D(A)$ und $\xi \in H$ gilt

$$A(x)(\xi) = \left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \right) (\xi) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S_t(x(\xi)) - x(\xi)}{t} = C(x(\xi)),$$

insbesondere erhält man: $[D(A)H] \subseteq D(C)$. □

Eine Proposition 3.72 entsprechende Version für $\mathcal{A}_l(X)$ lautet:

Proposition 3.73. *Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum. Sei $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf H mit Erzeuger C und den Eigenschaften:*

- (i) $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ konvergiert in der strikten X -Topologie gegen id_H für $t \rightarrow 0$,
- (ii) $S_t \circ x, S_t^* \circ x \in X$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in X$.

Definiere $T_t := L_{S_t} : X \rightarrow X, x \mapsto S_t \circ x$, für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe auf X mit $T_t \in \mathcal{A}(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei A der zugehörige Erzeuger. Dann gilt $[D(A)H] \subseteq D(C)$ und

$$A(x)(\xi) = C(x(\xi)) \quad \text{für alle } x \in D(A) \text{ und } \xi \in H.$$

Die obige Proposition beweist man analog zu Proposition 3.72.

3.8 Störungstheorie

In diesem Abschnitt formulieren wir einige Resultate aus der Störungstheorie auf Banachräumen für Operatorräume. So wird die Summe eines unbeschränkten und eines beschränkten Multiplikators und die Summe zweier unbeschränkter Multiplikatoren untersucht.

Bei Damaville ([Dam04], Proposition 2.1.(1), siehe auch [Dam07]) findet man das folgende Störungsergebnis für Operatoren auf Hilbert- C^* -Moduln:

Proposition 3.74. *Seien E, F Hilbert- C^* -Moduln über \mathfrak{A} . Für alle $A \in \mathcal{R}(E, F)$ und $B \in \mathbb{B}(E, F)$ gilt: $A + B \in \mathcal{R}(E, F)$.*

Um eine Verallgemeinerung der obigen Proposition (für den Fall $E = F$) auf Operatorräumen zu beweisen, sei zunächst an die folgende Aussage erinnert:

Satz 3.75 ([EN00], Theorem III.1.10). *Sei X ein Banachraum und A Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X . Sei $B \in L(X)$. Dann erzeugt $C := A + B$ eine C_0 -Halbgruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$, die wie folgt definiert ist: Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ setze*

$$S_t := \sum_{n=0}^{\infty} S_{t,n},$$

wobei für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv $S_{t,0} = T_t$ und

$$S_{t,n+1} = \int_0^t T_{t-s} B S_{s,n} ds$$

definiert sei.

3.8. STÖRUNGSTHEORIE

Hiermit erhält man:

Satz 3.76. *Sei X ein Operatorraum.*

- (i) *Ist $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ und $B \in \mathcal{M}_l(X)$, so ist $A + B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$.*
- (ii) *Ist $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ und $B \in \mathcal{A}_l(X)$ mit $B^* = -B$, so ist $A + B \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.*
- (iii) *Ist $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ und $B \in \mathcal{A}_l(X)$, so ist $A + B \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$.*

Beweis. (i): Sei $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ und $B \in \mathcal{M}_l(X)$. Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe. Setze $C := A + B$. Definiere für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv $S_{t,0} = T_t$ und

$$S_{t,n+1} = \int_0^t T_{t-s} B S_{s,n} ds.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ setze $S_t := \sum_{n=0}^{\infty} S_{t,n}$. Nach Satz 3.75 erzeugt C die C_0 -Halbgruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. Per Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $S_{t,n} \in \mathcal{M}_l(X)$. Somit erhält man: $S_t \in \mathcal{M}_l(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii): Sei $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ und $B \in \mathcal{A}_l(X)$ mit $B^* = -B$. Man findet nach Satz 3.45 ein $\check{A} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(X))$ mit $j(D(A)) \subseteq D(\check{A})$ und $j \circ A = \check{A} \circ j|_{D(A)}$. Es ist $b := \Theta_X^{-1}(B) \in \mathcal{IM}_\ell^*(X) \subseteq I_{11}(X)$ schiefadjungiert. Nach Proposition A.6 gilt: $I_{11}(X) \cong I_{11}(\mathcal{T}(X))$. Also kann man b als ein Element von $\mathcal{IM}_\ell^*(\mathcal{T}(X)) \subseteq I_{11}(\mathcal{T}(X))$ auffassen. Dann ist $\check{B} := \Theta_{\mathcal{T}(X)}(b) \in \mathcal{A}_l(\mathcal{T}(X))$ schiefadjungiert.

Nach Satz 3.9 ist $\check{A} \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$. Nach Beispiel A.16 gilt: $\mathcal{A}_l(\mathcal{T}(X)) \cong \mathbb{B}(\mathcal{T}(X))$. Somit hat man: $\check{B} \in \mathbb{B}(\mathcal{T}(X))$. Mit dem Störungsresultat von Damaville (Proposition 3.74) erhält man: $\check{A} + \check{B} \in \mathcal{R}(\mathcal{T}(X))$. Da $\check{A} + \check{B}$ schiefadjungiert ist, folgt wiederum mit Satz 3.9: $\check{A} + \check{B} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(\mathcal{T}(X))$.

Weil die von A erzeugte C_0 -Halbgruppe X invariant lässt, lässt die von $\check{A}|_{j(X)}$ erzeugte C_0 -Halbgruppe $j(X)$ invariant. Des weiteren gilt: $B(j(X)) \subseteq j(X)$. Da die von $\check{A} + \check{B}$ erzeugte C_0 -Halbgruppe $(\check{S}_t^+)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die in Satz 3.75 angegebene Gestalt hat, lässt $(\check{S}_t^+)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ $j(X)$ invariant. Analog erhält man, dass die von $-(\check{A} + \check{B})$ erzeugte C_0 -Halbgruppe $j(X)$ invariant lässt. Daher lässt die von $\check{A} + \check{B}$ erzeugte C_0 -Gruppe $j(X)$ invariant. Mit Proposition 3.53 erhält man: $(\check{A} + \check{B})|_{j(X)} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(j(X))$. Also folgt: $A + B \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.

(iii): Sei $A \in \mathcal{A}_l^{C_0}(X)$ und $B \in \mathcal{A}_l(X)$. Man findet ein $C : D(C) \subseteq X \rightarrow X$ mit: $i \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}}_{=: \hat{A}} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X))$. Nach Lemma 3.18 gilt: $\hat{B} := \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \in$

$\mathcal{A}_l(C_2(X))$. Da $i\hat{B}$ nach Lemma 3.18 schiefadjungiert ist, folgt mit (ii):

$$i \begin{pmatrix} 0 & A+B \\ C+B^* & 0 \end{pmatrix} = i\hat{A} + i\hat{B} \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(C_2(X)).$$

□

Wie man leicht sieht, gilt analog zum Fall von C_0 -Halbgruppen in Banachräumen ([EN00], Abschnitt II.2.7):

Proposition 3.77. *Sei X ein Operatorraum. Seien $A, B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ derart, dass die von A und B erzeugten C_0 -Halbgruppen $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$) kommutieren. Dann wird durch $R_t := S_t T_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X definiert mit Erzeuger $C \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$. Ferner ist $D(A) \cap D(B)$ ein wesentlicher Bereich für C und*

$$Cx = Ax + Bx \quad \text{für alle } x \in D(A) \cap D(B).$$

Eine entsprechende Version dieser Proposition gilt für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ anstelle von $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$.

Für die Formulierung des nächsten Satzes sei an die folgende Definition erinnert:

Definition 3.78. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Ein Operator $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ heißt **A -beschränkt**, falls $D(A) \subseteq D(B)$ gilt und falls $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren mit

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \tag{3.8.1}$$

für alle $x \in D(A)$. Die **A -Schranke** von B ist

$$a_0(A, B) := \inf\{a \in \mathbb{R}_{\geq 0}; \text{ es existiert } b \in \mathbb{R}_{>0} \text{ derart, dass (3.8.1) gilt}\}.$$

Im folgenden Satz ist der Störungsoperator $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ dissipativ, d. h.

$$\|(\lambda - B)x\| \geq \lambda\|x\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } x \in D(B).$$

Satz 3.79 ([EN00], Theorem III.2.7). *Sei X ein Banachraum und A Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Halbgruppe auf X . Sei $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ dissipativ und A -beschränkt mit A -Schranke $a_0(A, B) < 1$. Dann ist $A + B$ mit Definitionsbereich $D(A)$ Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Halbgruppe auf X .*

3.8. STÖRUNGSTHEORIE

Wie man in [Gol85], S. 39 unten, sieht, gilt der obige Satz für $a_0(A, B) = 1$ im allgemeinen nicht.

Die folgende Proposition ist ein Analogon des obigen Satzes für Operatorräume und folgt mit dem obigen Satz und Satz 3.36 (Satz von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen im Operatorraum):

Proposition 3.80. *Sei X ein Operatorraum, A Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe (bzw. C_0 -Gruppe) auf X und $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ (bzw. B und $-B$) vollständig dissipativ. Es sei B_n A_n -beschränkt mit A_n -Schranke*

$$a_0(A_n, B_n) < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $A+B$ mit Definitionsbereich $D(A)$ Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe (bzw. C_0 -Gruppe) auf X .

Beweis. (i): Sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist A_n Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Halbgruppe und B_n dissipativ mit $a_0(A_n, B_n) < 1$. Nach Satz 3.79 ist somit $A_n + B_n = (A + B)_n$ Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Halbgruppe.

(ii): Nach dem Satz von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen im Operatorraum (Satz 3.36) sind A und $-A$ Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe auf X . Weiter ist $-B_n$ ($-A_n$)-beschränkt mit $(-A_n)$ -Schranke $a_0(-A_n, -B_n) = a_0(A_n, B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit (i) folgt, dass $A + B$ und $(-A) + (-B) = -(A + B)$ Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe auf X sind. Somit erzeugt $A + B$ nach Satz 3.36 eine vollständig kontraktive C_0 -Gruppe auf X . \square

Mit Hilfe dieser Aussage und des Charakterisierungssatzes (Satz 3.26) ergibt sich:

Proposition 3.81. *Sei X ein Operatorraum und $A \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ so, dass A eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X erzeugt mit $T_t \in \overline{B}_{\mathcal{M}_l(X)}(0, 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass $\eta_B = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vollständig dissipativ ist und dass B_n A_n -beschränkt ist mit A_n -Schranke*

$$a_0(A_n, B_n) < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $A + B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$, genauer erzeugt $A + B$ eine C_0 -Halbgruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit $S_t \in \overline{B}_{\mathcal{M}_l(X)}(0, 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Beispielsweise ist η_B vollständig dissipativ, falls $B \in \mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ ist.

Beweis. Nach Satz 3.26 (Charakterisierung von $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$ mittels η_A) erzeugt η_A eine vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe auf $C_2(X)$. Man findet ein $b \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass gilt:

$$\|Bx\| \leq a_0(A, B)\|Ax\| + b\|x\|$$

für alle $x \in D(A)$. Es folgt:

$$\|\eta_B x\| = \|Bx_1\| \leq a_0(A, B)\|Ax_1\| + b\|x_1\| \leq a_0(A, B)\|\eta_A x\| + b\|x\|$$

für alle $x \in D(\eta_A)$. Somit ergibt sich, dass $(\eta_B)_n$ $(\eta_A)_n$ -beschränkt ist mit $a_0((\eta_A)_n, (\eta_B)_n) < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 3.80 ist $\eta_A + \eta_B = \eta_{A+B}$ Erzeuger einer vollständig kontraktiven C_0 -Halbgruppe auf $C_2(X)$. Also erhält man mit Satz 3.26 die Behauptung. \square

Eine entsprechende Version der obigen Proposition für $\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$ lautet:

Proposition 3.82. *Sei X ein Operatorraum und $A \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$. Sei $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ derart, dass η_B und $-\eta_B$ vollständig dissipativ sind und dass B_n A_n -beschränkt ist mit A_n -Schranke*

$$a_0(A_n, B_n) < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt: $A + B \in \mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$.

Anhang A

Beschränkte Multiplikatoren auf Operatorräumen

Wir wiederholen in diesem Kapitel bekannte Tatsachen über Linksmultiplikatoren und von links adjungierbare Multiplikatoren auf Operatorräumen.

A.1 Multiplikatoren

In diesem Abschnitt erinnern wir an einige Fakten zu Linksmultiplikatoren auf Operatorräumen. Diese verallgemeinern beispielsweise Linksmultiplikatoren auf C^* -Algebren (siehe Beispiel A.16). Wir notieren eine alternative Beschreibung und eine intrinsische Charakterisierung der Linksmultiplikatoren.

Definition A.1. Sei X ein Operatorraum und $T : X \rightarrow X$ linear.

- (i) T heißt **Linksmultiplikator** (bzw. **Rechtsmultiplikator**) auf X , falls ein Hilbertraum H , eine vollständige Isometrie $\sigma : X \rightarrow L(H)$ und ein $a \in L(H)$ so existieren, dass $\sigma(Tx) = a\sigma(x)$ (bzw. $\sigma(Tx) = \sigma(x)a$) für alle $x \in X$ gilt.
- (ii) Mit $\mathcal{M}_l(X)$ (bzw. $\mathcal{M}_r(X)$) sei die Menge aller Linksmultiplikatoren (bzw. Rechtsmultiplikatoren) auf X bezeichnet.
- (iii) Für alle $T \in \mathcal{M}_l(X)$ definiere die Multiplikatornorm

$$\|T\|_{\mathcal{M}_l(X)} := \inf \{ \|a\| ; \text{es existieren ein Hilbertraum } H, a \in L(H) \text{ und eine vollständige Isometrie } \sigma : X \rightarrow L(H) \text{ mit: } \forall x \in X : \sigma(Tx) = a\sigma(x) \}.$$

In der Definition von $\mathcal{M}_l(X)$ kann man $L(H)$ durch eine beliebige C^* -Algebra ersetzen. Dadurch wird die Menge $\mathcal{M}_l(X)$ nicht vergrößert, auch die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_l(X)}$ ändert sich nicht. Genauer gilt:

Proposition A.2 ([BLM04], 4.5.1). *Sei X ein Operatorraum. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l(X) = \{ & T : X \rightarrow X ; T \text{ linear, es existiert eine } C^* \text{-Algebra } \mathfrak{A}, \\ & a \in A \text{ und eine vollständige Isometrie } \sigma : X \rightarrow \mathfrak{A} \text{ mit:} \\ & \forall x \in X : \sigma(Tx) = a\sigma(x) \}. \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, gilt die folgende

Proposition A.3. *Sei X ein Operatorraum und $T \in \mathcal{M}_l(X)$. Dann gilt:*
 $\|T\|_{cb} \leq \|T\|_{\mathcal{M}_l(X)}.$

Falls X ein unitaler Operatorraum oder ein Hilbert- C^* -Modul ist, kann man $\mathcal{M}_l(X)$ vollständig isometrisch in $\text{CB}(X)$ einbetten ([Ble01], S. 20). Im allgemeinen ist $\mathcal{M}_l(X)$ allerdings nicht isometrisch in $\text{CB}(X)$ eingebettet ([Ble01], Example 4.4).

Im folgenden halten wir eine wichtige Konstruktion fest, mit der man unter anderem die injektive Hülle eines Operatorraumes erhält:

Proposition A.4 (Vgl. [BLM04], 4.4.2). *Sei $X \subseteq L(H)$ ein Operatorraum. Betrachte das Paulsen-System $\mathcal{S}(X) \subseteq M_2(L(H))$. Man findet eine vollständig kontraktive Abbildung $\Phi : M_2(L(H)) \rightarrow M_2(L(H))$, deren Bild eine injektive Hülle $I(\mathcal{S}(X))$ von $\mathcal{S}(X)$ ist. Ferner ist $I(\mathcal{S}(X))$ mit der Multiplikation $x \cdot y := x \cdot_\Phi y := \Phi(xy)$ eine unitale C^* -Algebra. Seien $p_1 := \text{id}_H \oplus 0$ und $p_2 := 0 \oplus \text{id}_H$ die kanonischen Projektionen in $I(\mathcal{S}(X))$. Wegen $\Phi(p_i) = p_i$ für alle $i \in \underline{2}$ ist Φ eckenerhaltend. Nach Definition von \cdot_Φ sind p_1 und p_2 orthogonale Projektionen in $I(\mathcal{S}(X))$. Somit wird durch*

$$I(\mathcal{S}(X)) \rightarrow M_2(I(\mathcal{S}(X))), a \mapsto \begin{pmatrix} p_1 \cdot_\Phi a \cdot_\Phi p_1 & p_1 \cdot_\Phi a \cdot_\Phi p_2 \\ p_2 \cdot_\Phi a \cdot_\Phi p_1 & p_2 \cdot_\Phi a \cdot_\Phi p_2 \end{pmatrix},$$

ein injektiver $$ -Homomorphismus definiert. Man kann also $I(\mathcal{S}(X))$ als aus 2×2 -Matrizen bestehend auffassen. Wir verwenden $I_{k\ell}(X)$ oder kurz $I_{k\ell}$ als Notation für die Ecke (k, ℓ) von $I(\mathcal{S}(X))$ für alle $k, \ell \in \underline{2}$, also hat man: $I_{k\ell}(X) \subseteq I(\mathcal{S}(X)) \subseteq M_2(L(H))$. Es gilt somit:*

$$I(\mathcal{S}(X)) \cong \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \subseteq M_2(I(\mathcal{S}(X))).$$

A.1. MULTIPLIKATOREN

Weiter sind I_{11} und I_{22} unitale C^* -Algebren. Sei j die kanonische Abbildung von X nach I_{12} . Dann ist (I_{12}, j) eine injektive Hülle von X .

Sei mit P die Ecke $(1, 2)$ von Φ bezeichnet. Dann ist P idempotent. Es ist I_{12} ein TRO mit dem Tripelprodukt $[\cdot, \cdot, \cdot]$, welches von dem Produkt der C^* -Algebra $I(\mathcal{S}(X))$ herrührt. Man hat für alle $x, y, z \in I_{12}$:

$$[x, y, z] = P(xy^*z)$$

und

$$e_{I_{11}(X)} \cdot x = x. \quad (\text{A.1.1})$$

Die C^* -Algebren $I_{11}(X)$, $I_{22}(X)$ und $I(\mathcal{S}(X))$ hängen nicht von der Einbettung $X \subseteq L(H)$ ab. Genauer gilt: Sei $u : X \rightarrow L(K)$ vollständig isometrisch und $Y := u(X)$. Dann findet man einen eckenerhaltenden, unitalen $*$ -Isomorphismus $\Phi : I(\mathcal{S}(X)) \rightarrow I(\mathcal{S}(Y))$, der durch Einschränken einen unitalen $*$ -Isomorphismus von $I_{11}(X)$ auf $I_{11}(Y)$ (bzw. von $I_{22}(X)$ auf $I_{22}(Y)$) induziert.

Man kann $I_{11}(X)$ (bzw. $I_{22}(X)$) mit Hilfe der Multiplikatoren einer bestimmten C^* -Algebra beschreiben:

Proposition A.5 (Vgl. [BLM04], 4.4.11, und [BP01], Corollary 1.8). *Sei X ein Operatorraum.*

(i) *Es sind $\mathcal{C}(X) := I(X)I(X)^*$ und $\mathcal{D}(X) := I(X)^*I(X)$ C^* -Algebren, wobei das Produkt in der C^* -Algebra $I(\mathcal{S}(X))$ gebildet wird. Weiter ist $\mathcal{C}(X)$ (bzw. $\mathcal{D}(X)$) eine C^* -Unteralgebra von $I_{11}(X)$ (bzw. $I_{22}(X)$).*

(ii) *Es gilt:*

$$\begin{aligned} I_{11}(X) &= \mathcal{M}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{M}_l(\mathcal{C}(X)) \quad \text{und} \\ I_{22}(X) &= \mathcal{M}(\mathcal{D}(X)) = \mathcal{M}_l(\mathcal{D}(X)). \end{aligned}$$

Proposition A.6. *Sei X ein Operatorraum. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{C}(C_2(X)) \cong \mathcal{C}(M_2(X))$ und $\mathcal{D}(C_2(X)) \cong \mathcal{D}(X)$.

(ii) $I_{11}(C_2(X)) \cong I_{11}(M_2(X))$ und $I_{22}(C_2(X)) \cong I_{22}(X)$.

(iii) $\mathcal{C}(\mathcal{T}(X)) \cong \mathcal{C}(X)$ und $\mathcal{D}(\mathcal{T}(X)) \cong \mathcal{D}(X)$.

(iv) $I_{11}(\mathcal{T}(X)) \cong I_{11}(X)$ und $I_{22}(\mathcal{T}(X)) \cong I_{22}(X)$.

(v) $I(\mathcal{S}(\mathcal{T}(X))) \cong I(\mathcal{S}(X))$.

Beweis. (i): Da für jeden Operatorraum Y gilt $M_{m,n}(I(Y)) \cong I(M_{m,n}(Y))$ (Proposition 2.37), erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(C_2(X)) &= I(C_2(X))I(C_2(X))^* \cong C_2(I(X))C_2(I(X))^* \\ &\cong \begin{pmatrix} I(X) & 0 \\ I(X) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(X)^* & I(X)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I(X)I(X)^* & I(X)I(X)^* \\ I(X)I(X)^* & I(X)I(X)^* \end{pmatrix} \\ &= M_2(I(X))M_2(I(X))^* \cong I(M_2(X))I(M_2(X)) \\ &= \mathcal{C}(M_2(X)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(C_2(X)) &= I(C_2(X))^*I(C_2(X)) \cong C_2(I(X))^*C_2(I(X)) \\ &\cong \begin{pmatrix} I(X)^* & I(X)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(X) & 0 \\ I(X) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I(X)^*I(X) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong I(X)^*I(X) = \mathcal{D}(X). \end{aligned}$$

(ii): Es ergibt sich mit Proposition A.5 und (i):

$$\begin{aligned} I_{11}(C_2(X)) &= \mathcal{M}(\mathcal{C}(C_2(X))) \cong \mathcal{M}(\mathcal{C}(M_2(X))) = I_{11}(M_2(X)) \quad \text{und} \\ I_{22}(C_2(X)) &= \mathcal{M}(\mathcal{D}(C_2(X))) \cong \mathcal{M}(\mathcal{D}(X)) = I_{22}(X). \end{aligned}$$

(iii): Nach (2.5.2) gilt: $I(\mathcal{T}(X)) \cong I(X)$. Somit folgt:

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}(X)) = I(\mathcal{T}(X))I(\mathcal{T}(X))^* \cong I(X)I(X)^* = \mathcal{C}(X).$$

Analog erhält man: $\mathcal{D}(\mathcal{T}(X)) \cong \mathcal{D}(X)$.

(iv) ergibt sich mit Proposition A.5 und (iii).

(v): Nach (2.5.2) gilt: $I(\mathcal{T}(X)) \cong I(X) \cong I_{12}(X)$. Zusammen mit Proposition A.4 und (iv) erhält man:

$$\begin{aligned} I(\mathcal{S}(\mathcal{T}(X))) &\cong \begin{pmatrix} I_{11}(\mathcal{T}(X)) & I(\mathcal{T}(X)) \\ I(\mathcal{T}(X))^* & I_{22}(\mathcal{T}(X)) \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} I_{11}(X) & I(X) \\ I(X)^* & I_{22}(X) \end{pmatrix} \cong I(\mathcal{S}(X)). \end{aligned}$$

□

Proposition A.7 ([BLM04], Proposition 4.4.12). *Sei X ein Operatorraum und $a \in I_{11}(X)$. Falls $a \cdot j(x) = 0$ für alle $x \in X$ gilt, dann folgt: $a = 0$.*

A.1. MULTIPLIKATOREN

Um eine alternative Beschreibung von $\mathcal{M}_l(X)$ zu erhalten, definieren wir:

Definition A.8. Sei X ein Operatorraum.

(i) Setze $\mathcal{IM}_\ell(X) := \{a \in I_{11}(X); a \cdot j(X) \subseteq j(X)\}$ und $\mathcal{IM}_\ell^*(X) := \mathcal{IM}_\ell(X) \cap \mathcal{IM}_\ell(X)^*$.

(ii) Für alle $a \in \mathcal{IM}_\ell(X)$ definiere den Linksmultiplikator

$$\tilde{L}_a : X \rightarrow X, x \mapsto j^{-1}(a \cdot j(x)).$$

Es ist $\mathcal{IM}_\ell(X)$ eine unitale Operatoralgebra und $\mathcal{IM}_\ell^*(X)$ eine unitale C^* -Algebra ([Zar01], S. 12).

Satz A.9 (Vgl. [Zar01], Theorem 1.6.2). *Sei X ein Operatorraum. Dann ist*

$$\Theta : \mathcal{IM}_\ell(X) \rightarrow \mathcal{M}_l(X), a \mapsto \tilde{L}_a,$$

ein unitaler, isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{IM}_\ell(X)$ auf die unitale Banachalgebra $(\mathcal{M}_l(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}_l(X)})$.

Insbesondere gilt: Für jedes $T \in \mathcal{M}_l(X)$ existiert genau ein $a \in \mathcal{IM}_\ell(X)$ mit $T = \tilde{L}_a$, und man hat $\|T\|_{\mathcal{M}_l(X)} = \|a\|_{I_{11}(X)}$.

Man kann somit $\mathcal{M}_l(X)$ so mit einer Operatorraumstruktur versehen, dass $\mathcal{M}_l(X)$ vollständig isometrisch isomorph zu $\mathcal{IM}_\ell(X)$ ist.

Die folgende wichtige Aussage stellt eine intrinsische Charakterisierung der Linksmultiplikatoren bereit. Eine Variante dieses Satzes für sogenannte matrixgeordnete Operatorräume wurde von W. Werner in [Wer99] (siehe auch [Wer04], Theorem 3.10) bewiesen. Aus dieser Variante folgt die Äquivalenz der Punkte (a) und (b) des folgenden Satzes:

Satz A.10 (Vgl. [Zar01], Proposition 1.6.4). *Sei X ein Operatorraum, $T : X \rightarrow X$ linear und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $T \in \mathcal{M}_l(X)$ mit $\|T\|_{\mathcal{M}_l(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$.

(b) Die Abbildung

$$\tau_{\lambda T}^c : C_2(X) \rightarrow C_2(X), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda T x \\ y \end{pmatrix},$$

ist vollständig kontraktiv.

(c) Es existiert ein $a \in I_{11}(X)$ mit $\|a\| \leq \frac{1}{\lambda}$ so, dass gilt:

$$j(Tx) = a \cdot j(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

A.2 Von links adjungierbare Multiplikatoren

In diesem Abschnitt wird an die von links adjungierbaren Multiplikatoren auf einem beliebigen Operatorraum X , als Menge $\mathcal{A}_l(X)$, erinnert, die auf einem Hilbert- C^* -Modul mit den adjungierbaren Operatoren übereinstimmen. Des weiteren wird eine intrinsische Charakterisierung unitärer Elemente aus $\mathcal{A}_l(X)$ angegeben.

Definition A.11. Sei X ein Operatorraum und $T : X \rightarrow X$.

- (i) T wird **von links adjungierbarer Multiplikator** genannt, falls ein Hilbertraum H , eine lineare, vollständige Isometrie $\sigma : X \rightarrow L(H)$ und eine Abbildung $S : X \rightarrow X$ so existieren, dass gilt:

$$\sigma(Tx)^* \sigma(y) = \sigma(x)^* \sigma(Sy) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

- (ii) Die Menge der von links adjungierbaren Multiplikatoren auf X wird mit $\mathcal{A}_l(X)$ bezeichnet.

Es folgt, dass jedes Element aus $\mathcal{A}_l(X)$ linear und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen beschränkt ist.

Proposition A.12 ([Zar01], Corollary 1.7.3). *Sei X ein Operatorraum und $T : X \rightarrow X$. Für alle $i \in \underline{2}$ sei H_i ein Hilbertraum, $\sigma_i : X \rightarrow L(H_i)$ eine vollständige Isometrie und $S_i : X \rightarrow X$ mit der Eigenschaft:*

$$\sigma_i(Tx)^* \sigma_i(y) = \sigma_i(x)^* \sigma_i(S_i y)$$

für alle $x, y \in X$. Dann gilt: $S_1 = S_2$.

Wegen dieser Proposition ist es sinnvoll, von *der* Linksadjungierten T^* eines Elementes $T \in \mathcal{A}_l(X)$ zu sprechen. Es gilt $T^* \in \mathcal{A}_l(X)$ und $T^{**} = T$.

Schränkt man den isometrischen Isomorphismus

$$\Theta : \mathcal{IM}_\ell(X) \rightarrow \mathcal{M}_l(X), a \mapsto \tilde{L}_a,$$

auf Satz A.9 auf $\mathcal{IM}_\ell^*(X)$ ein, so erhält man:

Proposition A.13 (Vgl. [Zar01], Proposition 1.7.4, 1.7.5 und 1.7.6). *Sei X ein Operatorraum. Dann gilt: $\mathcal{A}_l(X) \subseteq \mathcal{M}_l(X)$. Ferner ist*

$$\Theta|_{\mathcal{IM}_\ell^*(X)} : \mathcal{IM}_\ell^*(X) \rightarrow \mathcal{A}_l(X), a \mapsto \tilde{L}_a,$$

ein unitaler $$ -Isomorphismus auf die unitale C^* -Algebra $\mathcal{A}_l(X)$.*

A.2. VON LINKS ADJUNGIERBARE MULTIPLIKATOREN

Insbesondere folgt für ein beliebiges $T \in \mathcal{A}_l(X)$: Sei $a \in \mathcal{I}M_\ell^*(X)$ mit $j(Tx) = a \cdot j(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt:

$$j(T^*x) = a^* \cdot j(x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (\text{A.2.1})$$

Im Gegensatz zu $\mathcal{M}_l(X)$ kann man $\mathcal{A}_l(X)$ stets isometrisch in $\text{CB}(X)$ einbetten:

Proposition A.14 (Vgl. [BLM04], Proposition 4.5.8.(4)). *Sei X ein Operatorraum. Dann gilt: $\|T\| = \|T\|_{cb} = \|T\|_{\mathcal{M}_l(X)}$ für alle $T \in \mathcal{A}_l(X)$.*

Die unitären von links adjungierbaren Multiplikatoren kann man wie folgt charakterisieren:

Proposition A.15 ([Zar01], Proposition 1.7.8). *Sei X ein Operatorraum und $U : X \rightarrow X$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *U ist ein unitäres Element von $\mathcal{A}_l(X)$.*
- (b) *$\tau_U^c : C_2(X) \rightarrow C_2(X), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ux \\ y \end{pmatrix}$, ist ein vollständig isometrischer Isomorphismus auf $C_2(X)$.*
- (c) *Es existiert ein Hilbertraum, eine vollständige Isometrie $\sigma : X \rightarrow L(H)$ und ein $u \in L(H)$ unitär derart, dass $\sigma(Ux) = u\sigma(x)$ für alle $x \in X$ gilt.*

Die Linksmultiplikatoren auf einem Operatorraum sind eine Verallgemeinerung der Linksmultiplikatoren einer C^* -Algebra:

Beispiel A.16 (Vgl. [Ble04], Example 5.6). *(i) Es sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra. Mit X sei \mathfrak{A} aufgefasst als Operatorraum bezeichnet. Dann ist $\mathcal{M}_l(X)$ isomorph zu der Menge $\mathcal{M}_l(\mathfrak{A})$ der Linksmultiplikatoren auf der C^* -Algebra \mathfrak{A} und $\mathcal{A}_l(X)$ isomorph zu der Menge $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ der Multiplikatoren auf \mathfrak{A} .*

(ii) Sei H ein Hilbertraum. Dann gilt: $\mathcal{M}_r(H^r) = \mathcal{M}_l(H^c) = \mathcal{A}_l(H^c) = L(H)$ und $\mathcal{M}_r(H^c) = \mathcal{M}_l(H^r) = \mathcal{A}_l(H^r) \cong \mathbb{C}$.

(iii) Sei E ein Hilbert- C^ -Modul. Dann ist $\mathcal{A}_l(E)$ gleich der Menge $\mathbb{B}(E)$ der adjungierbaren Abbildungen auf E .*

Anhang B

C_0 -Halbgruppen

In diesem Kapitel stellen wir bekannte Tatsachen zu C_0 -Halbgruppen vor. Elementare Definitionen und Aussagen zu C_0 -Halbgruppen werden im ersten Abschnitt behandelt. Im darauffolgenden Abschnitt werden die Erzeuger von kontraktiven C_0 -Halbgruppen in den Sätzen von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips charakterisiert. Im letzten Abschnitt wird kurz auf die Erzeuger von C_0 -Gruppen eingegangen.

B.1 Grundlagen

Definition B.1. Sei X ein Banachraum.

- (i) Eine Familie $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$) von Operatoren aus $L(X)$ heißt **(Operator-)Halbgruppe** (bzw. **(Operator-)Gruppe**) auf X , falls gilt:

$$(I) \quad T_0 = \text{id}_X,$$

$$(II) \quad T_{s+t} = T_s T_t \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ (bzw. } s, t \in \mathbb{R}).$$

- (ii) Unter einer **C_0 -Halbgruppe** (bzw. **C_0 -Gruppe**) (oder auch **stark stetigen Halbgruppe** (bzw. **stark stetigen Gruppe**)) auf X versteht man eine Operatorhalbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. Operatorgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$), für die gilt:

$$\lim_{t \downarrow 0} T_t x = x \quad (\text{bzw. } \lim_{t \rightarrow 0} T_t x = x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (\text{B.1.1})$$

- (iii) Gilt statt (B.1.1) die stärkere Forderung

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T_t - \text{id}_X\| = 0, \quad (\text{B.1.2})$$

so spricht man von einer **normstetigen Halbgruppe**.

(B.1.1) ist nichts anderes als die Stetigkeit von $t \mapsto T_t$ bei $t = 0$ in der starken Operatortopologie auf $L(X)$. Analog bedeutet (B.1.2) gerade die Stetigkeit von $t \mapsto T_t$ bei $t = 0$ in der Operatornormtopologie.

Beispiel B.2 ([Wer07], S. 358–360). (i) Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Setze

$$T_t := e^{tA} = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine normstetige Halbgruppe.

(ii) Sei $p \in [1, \infty[$. Sei $X = C_0(\mathbb{R})$ oder $X = L^p(\mathbb{R})$. Betrachte die durch

$$(T_t f)(x) = f(x + t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f \in X$ und $x \in \mathbb{R}$ gegebene **Translationshalbgruppe**. Dann ist $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe.

(iii) Sei $p \in [1, \infty[$ und $d \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\gamma_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{> 0}$. Die **Wärmeleitungshalbgruppe** auf $X := L^p(\mathbb{R}^d)$ ist durch $T_0 = \text{id}_X$ bzw. $T_t f = \gamma_t * f$ für alle $t \in \mathbb{R}_{> 0}$ und $f \in X$ definiert.

Die folgende Proposition ist nützlich, um zu überprüfen, ob eine Halbgruppe stark stetig ist:

Proposition B.3 ([EN00], Proposition I.5.3). Sei X ein Banachraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine Halbgruppe auf X . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist eine C_0 -Halbgruppe.

(b) Die Abbildung $u_x : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X, t \mapsto T_t x$, ist stetig für alle $x \in X$.

(c) Es existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_{> 0}$ und eine dichte Teilmenge D in X mit

- (i) $\sup_{t \in [0, \delta]} \|T_t\| < \infty$,
- (ii) $\lim_{t \downarrow 0} T_t x = x$ für alle $x \in D$.

Proposition B.4 ([EN00], Proposition I.5.5). *Sei X ein Banachraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X . Dann existieren $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:*

$$\|T_t\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Es gibt C_0 -Halbgruppen, für die $M > 1$ gilt, siehe beispielsweise [EN00], Example I.5.7.(iii) (Translationshalbgruppe mit Sprung), oder [Dav80], Example 1.19.

Um das Wachstumsverhalten einer C_0 -Halbgruppe zu beschreiben, führt man die folgenden Begriffe ein:

Definition B.5. Sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ heißt

- (i) **beschränkt (mit Schranke M)**, falls man $\omega = 0$ in Proposition B.4 wählen kann,
- (ii) **quasikontraktiv (zum Parameter ω)**, falls man $M = 1$ in Proposition B.4 wählen kann, und
- (iii) **kontraktiv**, falls man $M = 1$ und $\omega = 0$ in Proposition B.4 wählen kann.

Man möchte einer C_0 -Halbgruppe einen eindeutig bestimmten, im allgemeinen unbeschränkten Operator, ihren Erzeuger, zuordnen. Eine Hauptaufgabe der Theorie der Halbgruppen ist es, den Zusammenhang zwischen C_0 -Halbgruppe und Erzeuger zu studieren.

Definition B.6. Sei X ein Banachraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine C_0 -Halbgruppe. Der **Erzeuger** von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist der Operator A , der durch

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}$$

auf dem Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ x \in X ; \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existiert} \right\}$$

definiert wird.

Definiere $u_x : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X, t \mapsto T_t x$. Dann ist Ax gleich dem Wert der (rechtsseitigen) Ableitung von u_x in 0 für alle $x \in D(A)$.

Beispiel B.7 ([Wer07], S. 363, [EN00], Proposition 1 in II.2.10).

(i) Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Der Erzeuger der Halbgruppe $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist A selbst, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{tA} - \text{id}_X}{t} - A \right\| &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} \|A\|^n}{n!} \\ &\leq t \|A\|^2 e^{t\|A\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \downarrow 0. \end{aligned}$$

(ii) Sei $p \in [1, \infty[$. Wir betrachten die Translationshalbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf $X = C_0(\mathbb{R})$ oder $X = L^p(\mathbb{R})$. Für alle $f \in X$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

falls die Grenzwerte existieren. Somit ist der Erzeuger A von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ formal der Ableitungsoperator $f \mapsto f'$. Im Falle $X = C_0(\mathbb{R})$ erhält man als Definitionsbereich

$$D(A) = \{f \in C_0(\mathbb{R}); f' \text{ existiert und } f' \in C_0(\mathbb{R})\},$$

im Falle $X = L^p(\mathbb{R})$

$$D(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}); f \text{ ist absolutstetig und } f' \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

Die folgenden beiden Sätze beschreiben Eigenschaften des Erzeugers einer C_0 -Halbgruppe.

Satz B.8 ([Wer07], Satz VII.4.6). Der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe ist dicht definiert und abgeschlossen.

Satz B.9 ([Wer07], Korollar VII.4.8). Zwei C_0 -Halbgruppen mit demselben Erzeuger stimmen überein.

B.2 Die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips

Um den nachfolgenden Satz formulieren zu können, benötigen wir die folgende

Definition B.10. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear.

B.2. DIE SÄTZE VON HILLE-YOSIDA UND VON LUMER-PHILLIPS

(i) Man nennt

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \lambda - A : D(A) \rightarrow X \text{ ist bijektiv auf } X \\ \text{mit } (\lambda - A)^{-1} \in L(X) \}$$

die **Resolventenmenge** von A und das Komplement $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ das **Spektrum** von A .

(ii) Für alle $\lambda \in \rho(A)$ heißt

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} = (\lambda \text{id}_X - A)^{-1}$$

Resolvente von A im Punkte λ .

Ist A abgeschlossen und $\lambda - A$ bijektiv auf X , so ist $(\lambda - A)^{-1}$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig.

Der folgende Satz stellt eine wichtige Formel bereit, die eine C_0 -Halbgruppe mit der Resolvente ihres Erzeugers in Verbindung bringt:

Satz B.11 (Vgl. [EN00], Theorem II.1.10 und Corollary II.1.11). *Sei X ein Banachraum und A der Erzeuger der C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ auf X . Nach [EN00], Proposition I.5.5, oder Proposition B.4 findet man $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ mit*

$$\|T_t\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dann gilt:

$$(i) \quad \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} \lambda > \omega \} \subseteq \rho(A).$$

$$(ii) \quad R(\lambda, A)^k x = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty s^{k-1} e^{-\lambda s} T_s x \, ds \quad \text{für alle } x \in X, k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} \lambda > \omega.$$

$$(iii) \quad \|R(\lambda, A)^k\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} \lambda > \omega.$$

Der folgende fundamentale Satz charakterisiert die Erzeuger kontraktiver C_0 -Halbgruppen ([Wer07], Theorem VII.4.11):

Satz B.12 (Satz von Hille-Yosida für kontraktive C_0 -Halbgruppen). *Sei X ein Banachraum. Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ist genau dann Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Halbgruppe, wenn A dicht definiert und abgeschlossen ist, $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \rho(A)$ gilt und*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Falls eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ quasikontraktiv ist, es also ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit

$$\|T_t\| \leq e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

gibt, kann man die obige Charakterisierung auf die umskalierte kontraktive Halbgruppe, die gegeben ist durch

$$S_t := e^{-\omega t} T_t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

anwenden. Da der Erzeuger von $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ die Gestalt $B = A - \omega$ hat, erhält Satz B.12 die folgende Form:

Folgerung B.13. *Sei X ein Banachraum und $\omega \in \mathbb{R}$. Für einen Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *A erzeugt eine quasikontraktive Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit*

$$\|T_t\| \leq e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(b) *A ist dicht definiert, abgeschlossen mit $\mathbb{R}_{>\omega} \subseteq \rho(A)$, und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}_{>\omega}$ gilt:*

$$\|(\lambda - \omega)R(\lambda, A)\| \leq 1.$$

Man kann den Erzeuger einer beliebigen C_0 -Halbgruppe charakterisieren, benötigt dann allerdings Normabschätzungen für *alle* Potenzen der Resolvente (vgl. [EN00], Theorem II.3.8):

Satz B.14 (Satz von Hille-Yosida, allgemeiner Fall). *Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *A erzeugt eine C_0 -Halbgruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ mit*

$$\|T_t\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(b) *A ist dicht definiert, abgeschlossen mit $\mathbb{R}_{>\omega} \subseteq \rho(A)$, und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}_{>\omega}$ gilt:*

$$\|[(\lambda - \omega)R(\lambda, A)]^k\| \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Lemma B.15. *Sei X ein Banachraum. Seien $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ und $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ linear mit $B \subseteq A$ und $\rho(B) \neq \emptyset$. Dann gilt: $B = A$.*

B.2. DIE SÄTZE VON HILLE-YOSIDA UND VON LUMER-PHILLIPS

Beweis. Sei $\lambda \in \rho(B)$. Es gilt: $\lambda - B \subseteq \lambda - A$. Somit folgt: $(\lambda - B)^{-1} \subseteq (\lambda - A)^{-1}$. Da $(\lambda - B)^{-1} \in L(X)$ ist, ergibt sich: $(\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}$. Man erhält: $B = A$. \square

Als einfache Folgerung erhält man:

Folgerung B.16. *Sei X ein Banachraum, A (bzw. B) Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(S_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ (bzw. $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$) auf X mit $B \subseteq A$. Dann gilt: $B = A$.*

Beweis. Nach dem Satz von Hille-Yosida (Satz B.14) gilt: $\rho(B) \neq \emptyset$. Mit Lemma B.15 erhält man: $B = A$. \square

In der Praxis sind die Versionen des Satzes von Hille-Yosida (Satz B.12, Folgerung B.13 und Satz B.14) häufig schwierig anzuwenden, da man eine explizite Kenntnis der Resolventenmenge benötigt. Deshalb werden wir mit Hilfe dissipativer Operatoren eine weitere Charakterisierung der Erzeuger kontraktiver C_0 -Halbgruppen aufführen.

Definition B.17. Sei X ein Banachraum. Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ heißt **dissipativ**, falls gilt:

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } x \in D(A).$$

Mit Hilfe der folgenden Definition erhält man eine alternative Charakterisierung dissipativer Operatoren:

Definition B.18. Sei X ein Banachraum. Definiere für alle $x \in X$ die Menge

$$\mathcal{J}(x) := \{\varphi \in X^* ; \varphi(x) = \|x\|^2 = \|\varphi\|^2\},$$

genannt **Dualitätsmenge** im Punkte x , wobei mit X^* der Dualraum von X bezeichnet wird.

Nach dem Satz von Hahn-Banach ist die Dualitätsmenge nicht-leer.

Dissipative Operatoren kann man wie folgt charakterisieren:

Proposition B.19 ([EN00], Proposition II.3.23). *Sei X ein Banachraum. Ein Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ ist genau dann dissipativ, wenn für jedes $x \in D(A)$ ein $\varphi \in \mathcal{J}(x)$ existiert mit*

$$\operatorname{Re} \varphi(Ax) \leq 0. \tag{B.2.1}$$

Falls A Erzeuger einer kontraktiven C_0 -Halbgruppe ist, dann gilt (B.2.1) für alle $x \in D(A)$ und beliebige $\varphi \in \mathcal{J}(x)$.

Im einem beliebigen Hilbertraum H ist, wenn man H kanonisch mit seinem Dualraum H^* identifiziert,

$$\mathcal{J}(x) = \{x\}$$

für alle $x \in H$. Somit ist ein Operator A in H genau dann dissipativ, wenn gilt:

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle \leq 0$$

für alle $x \in D(A)$. Dies gilt insbesondere für selbstadjungierte Operatoren mit negativem Spektrum.

Es folgt die angekündigte Charakterisierung der Erzeuger kontraktiver C_0 -Halbgruppen ([Wer07], Theorem VII.4.16):

Satz B.20 (Satz von Lumer-Phillips). *Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear und dicht definiert. Dann erzeugt A genau dann eine kontraktive C_0 -Halbgruppe, wenn A dissipativ ist und ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, dass $\lambda - A$ surjektiv auf X ist.*

B.3 Erzeuger von C_0 -Gruppen

Man kann ein dem Satz von Hille-Yosida (Satz B.14) entsprechendes Resultat auch für C_0 -Gruppen formulieren. Hierfür wird zunächst definiert, was man unter einem Erzeuger einer C_0 -Gruppe versteht:

Definition B.21. Der **Erzeuger** einer C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf einem Banachraum X ist der Operator $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$, der durch

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}$$

für alle x aus seinem Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ x \in X ; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existiert} \right\}$$

definiert wird.

Sei $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe mit Erzeuger A . Dann kann man $T_t^+ := T_t$ und $T_t^- := T_{-t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren. Es folgt aus der obigen Definition, dass $(T_t^+)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ und $(T_t^-)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ C_0 -Halbgruppen mit Erzeuger A bzw. $-A$ sind. Falls ein Operator A also Erzeuger einer C_0 -Gruppe ist, sind A und $-A$ Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe. Der folgende Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt (vgl. [EN00], Abschnitt II.3.11):

B.3. ERZEUGER VON C_0 -GRUPPEN

Satz B.22 (Satz von Hille-Yosida für C_0 -Gruppen). *Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ linear. Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *A erzeugt eine C_0 -Gruppe $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft:*

$$\|T_t\| \leq M e^{\omega|t|} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(b) *A und $-A$ erzeugen C_0 -Halbgruppen $(T_t^+)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ bzw. $(T_t^-)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$, die folgendes erfüllen:*

$$\|T_t^+\|, \|T_t^-\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

(c) *A ist dicht definiert, abgeschlossen und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > \omega$ hat man $\lambda \in \rho(A)$ und*

$$\|[(|\lambda| - \omega)R(\lambda, A)]^k\| \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Literaturverzeichnis

- [Ara01] ARA, PERE: *Morita equivalence and Pedersen ideals*. Proc. Amer. Math. Soc., 129(4):1041–1049 (electronic), 2001.
- [Baa80] BAAJ, SAAD: *Multipliqueurs non bornés*. Doktorarbeit, Thèse 3ème cycle, Université Paris 6, 1980.
- [BJ83] BAAJ, SAAD und PIERRE JULG: *Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^* -modules hilbertiens*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 296(21):875–878, 1983.
- [BKNW07] BLECHER, DAVID P., KAY KIRKPATRICK, MATTHEW NEAL, and WEND WERNER: *Ordered involutive operator spaces*. Positivity, 11(3):497–510, 2007.
- [Bla06] BLACKADAR, BRUCE: *Operator algebras*, volume 122 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Ble01] BLECHER, DAVID P.: *The Shilov boundary of an operator space and the characterization theorems*. J. Funct. Anal., 182(2):280–343, 2001.
- [Ble04] BLECHER, DAVID P.: *Multipliers, C^* -modules, and algebraic structure in spaces of Hilbert space operators*. In *Operator algebras, quantization, and noncommutative geometry*, volume 365 of *Contemp. Math.*, pages 85–128. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [BLM04] BLECHER, DAVID P. and CHRISTIAN LE MERDY: *Operator algebras and their modules—an operator space approach*, volume 30 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2004.

- [BN08] BLECHER, DAVID P. and MATTHEW NEAL: *Metric characterizations of isometries and of unital operator spaces and systems*. Preprint (arXiv:0805:2166v2), 2008.
- [BP01] BLECHER, DAVID P. and VERN I. PAULSEN: *Multipliers of operator spaces, and the injective envelope*. Pacific J. Math., 200(1):1–17, 2001.
- [BW06] BLECHER, DAVID P. and WEND WERNER: *Ordered C^* -modules*. Proc. London Math. Soc. (3), 92(3):682–712, 2006.
- [Con81] CONNES, ALAIN: *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebra by an action of \mathbf{R}* . Adv. in Math., 39(1):31–55, 1981.
- [Dam04] DAMAVILLE, STÉPHANE: *Régularité des opérateurs quadratiquement bornés dans les modules de Hilbert*. Preprintreihe des SFB 478 – Geometrische Strukturen in der Mathematik des Mathematischen Instituts der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, 323, 2004.
- [Dam07] DAMAVILLE, STÉPHANE: *Régularité d’opérateurs non bornés dans les modules de Hilbert*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 344(12):769–772, 2007.
- [Dav80] DAVIES, EDWARD BRIAN: *One-parameter semigroups*, volume 15 of *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press Inc., London, 1980.
- [DS63] DUNFORD, NELSON and JACOB T. SCHWARTZ: *Linear operators. Part II*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1963.
- [EN00] ENGEL, KLAUS-JOCHEN and RAINER NAGEL: *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [ER00] EFFROS, EDWARD G. and ZHONG-JIN RUAN: *Operator spaces*, volume 23 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. Oxford University Press, New York, 2000.
- [Exe97] EXEL, RUY: *Twisted partial actions: a classification of regular C^* -algebraic bundles*. Proc. London Math. Soc. (3), 74(2):417–443, 1997.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Fol95] FOLLAND, GERALD B.: *A course in abstract harmonic analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [Gol85] GOLDSTEIN, JEROME A.: *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.
- [Ham99] HAMANA, MASAMICHI: *Triple envelopes and Šilov boundaries of operator spaces*. Math. J. Toyama Univ., 22:77–93, 1999.
- [Har81] HARRIS, LAWRENCE A.: *A generalization of C^* -algebras*. Proc. London Math. Soc. (3), 42(2):331–361, 1981.
- [HN08] HUANG, XU-JIAN and CHI-KEUNG NG: *An abstract characterization of unital operator spaces*. Preprint (arXiv:0805:2447v2), 2008.
- [HQVK92] HOLLEVOET, J., J. QUAEGBEUR, and S. VAN KEER: *Stone’s theorem in C^* -algebras*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 43(170):227–233, 1992.
- [HR90] HEWITT, E. and K. ROSS: *Abstract Harmonic Analysis II*. Academic Press, 1990.
- [Kus97] KUSTERMANS, JOHAN: *The functional calculus of regular operators on Hilbert C^* -modules revisited*. Preprint (arXiv:funct-an/9706007v1), 1997.
- [Lan95] LANCE, E. CHRISTOPHER: *Hilbert C^* -modules: a toolkit for operator algebraists*, volume 210 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [LT76] LAZAR, ALDO J. and DONALD C. TAYLOR: *Multipliers of Pedersen’s ideal*. Mem. Amer. Math. Soc., 5(169):iii+111, 1976.
- [NR03] NEAL, MATTHEW and BERNARD RUSSO: *Operator space characterizations of C^* -algebras and ternary rings*. Pacific J. Math., 209(2):339–364, 2003.
- [Pal99] PAL, ARUPKUMAR: *Regular operators on Hilbert C^* -modules*. J. Operator Theory, 42(2):331–350, 1999.

- [Pau02] PAULSEN, VERN: *Completely bounded maps and operator algebras*, volume 78 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Ped66] PEDERSEN, GERT K.: *Measure theory for C^* algebras*. Math. Scand., 19:131–145, 1966.
- [Ped79] PEDERSEN, GERT K.: *C^* -Algebras and their Automorphism Groups*. Academic Press, 1979.
- [Phi88] PHILLIPS, N. CHRISTOPHER: *A new approach to the multipliers of Pedersen's ideal*. Proc. Amer. Math. Soc., 104(3):861–867, 1988.
- [RW98] RAEBURN, IAIN and DANA P. WILLIAMS: *Morita equivalence and continuous-trace C^* -algebras*, volume 60 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Upm85] UPMEIER, HARALD: *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^* -algebras*, volume 104 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.
- [Web04] WEBSTER, CORRAN: *On unbounded operators affiliated with C^* -algebras*. J. Operator Theory, 51(2):237–244, 2004.
- [Wer99] WERNER, WEND: *Small k -groups for operator systems*. Unpublished manuscript, 1999.
- [Wer04] WERNER, WEND: *Multipliers on matrix ordered operator spaces and some K -groups*. J. Funct. Anal., 206(2):356–378, 2004.
- [Wer07] WERNER, DIRK: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 6. Auflage, 2007.
- [WN92] WORONOWICZ, STANISŁAW L. und KAZIMIERZ NAPIÓRKOWSKI: *Operator theory in the C^* -algebra framework*. Rep. Math. Phys., 31(3):353–371, 1992.
- [Wor91] WORONOWICZ, STANISŁAW L.: *Unbounded elements affiliated with C^* -algebras and noncompact quantum groups*. Comm. Math. Phys., 136(2):399–432, 1991.
- [Wor95] WORONOWICZ, STANISŁAW L.: *C^* -algebras generated by unbounded elements*. Rev. Math. Phys., 7(3):481–521, 1995.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Zar01] ZARIKIAN, VREJ: *Complete One-sided M -ideals in operator spaces*. PhD thesis, University of California, Los Angeles, 2001.
- [Zet83] ZETTL, HEINRICH: *A characterization of ternary rings of operators*. Adv. in Math., 48(2):117–143, 1983.

Symbolverzeichnis

$[MN]$, 5	H^r , 33
$\mathbb{1}$, 5	$I_{k\ell}$, 100
$\mathfrak{A}_{\geq 0}$ (positive Elemente), 5	$I_{k\ell}(X)$, 100
$a_0(A, B)$, 96	$\mathcal{I}M_\ell(X)$, 103
$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, 22, 59	$\mathcal{I}M_\ell^*(X)$, 103
$\mathcal{A}_l(X)$, 104	$I(X)$ (injektive Hülle), 38
$\mathcal{A}_{l,s}^{C_0}(X)$, 53	j , 38, 42
$\mathcal{A}_l^{C_0}(X)$, 59	$j_{2,1}$, 60
$\text{alg } M$, 5	$\mathcal{J}(x)$ (Dualitätsmenge), 113
$\alpha^{(n)}$ (Amplifikation), 28	$K_{\mathfrak{A}}$ (Pedersen-Ideal), 25
α_n (Amplifikation), 28	$\mathcal{K}(X)$ (kompakte Operatoren), 5
$A \oplus B$, 63	$\mathcal{K}(X, Y)$, 5
$A _X$, 82	$\mathbb{K}(E)$, 6
$\mathbb{B}(E)$, 5	$\mathbb{K}(E, F)$, 6
$\mathbb{B}(E, F)$, 5	$B_X(x, r)$ (offene Kugel), 5
$\text{CB}(X)$, 29	$\overline{B}_X(x, r)$ (abgeschlossene Kugel), 5
$\text{CB}(X, Y)$, 29	\tilde{L}_a , 103
$C_n(X)$ ($= M_{n,1}(X)$), 30	$\text{lin } M$, 5
$\mathcal{C}(X)$ ($= I(X)I(X)^*$), 101	$\overline{\text{lin } M}$, 5
$D(A)$ (Definitionsbereich), 5	$L(X)$, 5
$\mathcal{D}(X)$ ($= I(X)^*I(X)$), 101	$L(X, Y)$, 5
$E \oplus F$, 22	$\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ (Multiplikatoren), 11
$e_{\mathfrak{A}}$ (Einselement), 5	$\mathcal{M}_l(\mathfrak{A})$ (Linksmultiplikatoren), 5
e_t , 15	$\min(X)$, 31
e_X (Einselement), 34, 38	$M_{m,n}$ ($:= M_{m,n}(\mathbb{C})$), 28
η_A , 64	$M_{m,n}(V)$ ($m \times n$ -Matrizen über V), 28
H^c , 33	

MN , 5
 M_n ($:= M_{n,n}(\mathbb{C})$), 28
 $M_n(V)$ ($:= M_{n,n}(V)$), 28
 $\mathcal{M}_l(X)$ (Linksmultiplikatoren), 99
 $\mathcal{M}_l^{C_0}(X)$, 53
 $\mathcal{M}_r(X)$ (Rechtsmultiplikatoren), 99
 \mathbb{N} ($:= \{1, 2, 3, \dots\}$), 5
 \mathbb{N}_0 ($:= \{0, 1, 2, \dots\}$), 5
 \underline{n} ($:= \{1, \dots, n\}$), 5
 $\|\cdot\|_{\text{cb}}$, 29
 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_l(X)}$ (Multiplikatornorm), 99
 φ^\star , 45
 φ_T , 13
 ψ_T , 14
 $\mathcal{R}(E)$ (reguläre Operatoren), 8
 $\mathcal{R}(E, F)$ (reguläre Operatoren), 8
 $\rho(A)$ (Resolventenmenge), 111
 $R(\lambda, A)$ ($:= (\lambda - A)^{-1}$), 111
 $\sigma(A)$ (Spektrum), 14, 111
 $\mathcal{S}(X)$ (Paulsen-System), 35
 Θ , 103
 T^* , 8, 80, 104
 $\mathcal{T}(X)$ (ternäre Hülle), 42
 $W_{M,Y}$, 74
 $x \oplus y$, 28
 z_T (z -Transformierte), 10

Stichwortverzeichnis

- A -beschränkt, 96
- Adjungierte, 8, 80
- Amplifikation, 28
- A -Schranke, 96
- beschränkte C_0 -Halbgruppe, 109
- Bizentralisator, 11
- C_0 -Gruppe, 107
- C_0 -Halbgruppe, 107
- C_0 -Linksmultiplikator, 53
- dissipativer Operator, 113
- Dualitätsmenge, 113
- Erweiterung eines Operatorraumes, 36
- Erzeuger einer C_0 -Gruppe, 114
- Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe, 109
- hereditäre $*$ -Unteralgebra, 25
- injektive $*$ -Hülle, 44
- injektive Hülle, 36
- injektiver s. a. Operatorraum, 44
- injektiver Operatorraum, 36
- invariantes Ordnungsideal, 25
- kontraktive C_0 -Halbgruppe, 109
- Linksmultiplikator, 5, 99
- matrixnormierter Raum, 28
- Multiplikationshalbgruppe, 85
- Multiplikator, 11
- nicht-ausgearteter $*$ -Homomorphismus, 12
- normstetige Halbgruppe, 107
- Operatorraum, 28
- Operatorsystem, 34
- Ordnungsideal, 25
- Ordnungsisomorphismus, 34
- Ordnungsmonomorphismus, 34
- Paulsen-System, 35
- positive Abbildung, 34
- positives Element eines unitalen Operatorsystems, 34
- quasikontraktive C_0 -Halbgruppe, 109
- Rechtsmultiplikator, 99
- regulärer Operator, 8
- Resolvente, 111
- Resolventenmenge, 111
- s. a. Operatorraum, 42
- schiefadjungiert, 9
- selbstadjungiert, 9
- selbstadjungierter Operatorraum, 42
- Spalten-Hilbertoperatorraum, 33
- Spaltenoperatorraum, 30
- Spektrum eines Operators, 14, 111
- stark stetige Gruppe, 107
- stark stetige Halbgruppe, 107
- $*$ -Erweiterung eines s. a. Operatorraumes, 44

- *-linear, 42
- *-TRO, 43
- *-Untertripel, 43
- *-X-Abbildung, 44
- *-X-Halbnorm, 45
- *-X-Projektion, 45
- strikt stetig, 15
- strikte X -Topologie, 91
- strikte Topologie, 12
- symmetrisch, 9

- ternäre Hülle, 42
- ternäre *-Erweiterung, 43
- ternäre *-Hülle, 43
- ternärer Ring von Operatoren, 40
- ternärer *-Morphismus, 43
- Translationshalbgruppe, 108
- Tripelerweiterung, 41
- Tripelmorphismus, 40, 41
- Tripelprodukt, 39, 41
- Tripelsystem, 41
- TRO, 39
- $\mathcal{T}(X)$ -Einbettung, 86

- unbeschränkter Multiplikator, 59
- unbeschränkter schiefadjungierter
Multiplikator, 53
- unitale Abbildung, 34
- unitaler Operatorraum, 38
- Untertripel, 40, 41

- vollständig beschränkte Abbildung,
29
- vollständig dissipativer Operator,
71
- vollständig isometrische Abbildung,
29
- vollständig kontraktive C_0 -Halbgruppe,
65
- vollständig kontraktive Abbildung,
29
- vollständig positive Abbildung, 34
- von links adjungierbarer Multiplikator, 104
- wesentlicher Bereich, 73
- Wärmeleitungshalbgruppe, 108

- X -Abbildung, 36
- X -Halbnorm, 37
- X -Projektion, 36

- Zeilen-Hilbertoperatorraum, 33
- z -Transformierte, 10